Math. P.
741

Math. P. 741

2 N 7 ad 20-2.

Grundlehren
der
Algebra,
zur
Erleichterung dieses Studiums
faßlich vorgetragen

von
Joh. Jos. Ign. Hoffmann,
Königl. Baier. Oberschulrath, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik, auch Professor an dem Forstlehrinstitute ꝛc.

Mit drey Kupfertafeln.

Bayer. Staatsministerium f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
65
Aa²
9

Giesen,
bey Georg Friedrich Tasché,
1816.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN
Gd 163/3164

Bayerische Staatsbibliothek München

Kön. Bair. Ministerial Haupt u. Forst. Buchhaltung

Vorerinnerung.

Nachfolgende Schrift soll für Jene ein bequemer Leitfaden seyn, welche mit den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie (einschließlich der Trigonometrie) vertraut, das Elementargebiet der Algebra zu betreten wünschen.

Der Verfasser hat sich darin eines hohen Grades von Faßlichkeit der Darstellung beflissen, um den Wahn manches Unkundigen zu verscheuchen, als seyen die Grundlehren der algebraischen Rechnung schwer und zurückschreckend.

Daher können die meisten Schüler und Liebhaber der Algebra sich durch eigenes Studium der kleinen Schrift selbst unterrichten; doch werden ihre Fortschritte, unter Leitung eines sachkundigen Lehrers, schneller und sicherer seyn.

Die Elemente der Algebra sind, nach des Verfassers bestem Wissen, noch nicht auf diese Weise, sowohl in Hinsicht des Inhaltes, als des Vortrags, in einem Lehrbuche dargestellt. Daher ist zu hoffen, daß dieses Werkchen nicht zu den überflüssigen gezählt werde. Wenn es aber wirklich dazu dienet, das algebraische Studium auf Gymnasien und Lyceen zu erleichtern, und dieser vortrefflichen Lehre unter den Studierenden wahre Freunde zu erwerben, so fände der Verfasser darin den angenehmsten Lohn für seine Bemühung.

Zur größern Verbreitung der Schrift wird dieselbe vorzüglich den wohlwollenden und sachkundigen Lehrern empfohlen. Obgleich sie nichts, oder wenig Neues (im strengen Sinne des Wortes) darin finden, so wird es Ihnen doch erfreulich seyn, einen Leitfaden zu haben, der Ihnen den Vortrag, und den Schülern das Nachstudieren erleichtert. Nach Belieben können Sie sodann, durch Vermehrung der Aufgaben, den Unterricht erweitern, und den Bedürfnissen ihrer Zuhörer anpassen. Etwaige Gebrechen des Werkchens werden Sie mit Nachsicht verbessern.

Absichtlich wurde die Lehre von den entgegengesetzten Zahlen nebst der Buchstabenrechnung, als nöthige Vorbereitungs = Uebungen, vorangeschickt, weil diese öfters nicht mit gehöriger Klarheit und Schärfe vor=

getragen werden. Auch wurde davon nicht mehr und weniger aufgenommen, als zur nachfolgenden Ausführung der Algebra erfoderlich ist.

In der Algebra selbst sind alle Regeln durch schickliche Beyspiele erläutert; überzeugt, daß das Allgemeine, durch Uebung am Besondern, um so leichter erkannt wird. Blose Regeln sind dem Anfänger trocken; aber leicht werden dieselben aus solchen Aufgaben abstrahirt, welche für den Schüler einiges Interesse haben.

Absichtlich sind die Aufgaben vom dritten Grade, und von höhern Graden, nicht darin aufgenommen, weil diese, nach des Verfassers Ansicht, für einen höhern Cursus gehören.

Auch in die geometrischen Aufgaben suchte der Verfasser eine angenehme Mannigfaltigkeit zu bringen. Zur größern Belehrung des Schülers ist auch jedesmal die geometrische Construction des algebraisch gefundenen Werthes beygefügt worden.

Schließlich bemerkt der Verfasser, daß diese Elementar-Algebra aus dem zugleich erschienenen größern Werke: Grundlehren der Algebra, höhern Geometrie und Infinitesimalrechnung ꝛc. von J. J. J. Hoffmann ꝛc. Giesen, b. G. F. Tasché.

deshalb als ein eigenes Schriftchen abgedruckt worden ist, um Jenen nützlich zu seyn, welche nicht Lust haben, ihr mathematisches Studium auf höhere Gegenstände zu lenken. Dies wird besonders bey Zöglingen der gewöhnlichen Gymnasien, und bey manchem Privatschüler der Fall seyn.

Aschaffenburg im September 1815.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Inhaltsverzeichniß.

I. Abschnitt.

Entgegengesetzte Zahlen . . . . . . S. 1

II. Abschnitt.

Buchstabenrechnung . . . . S. 15

III. Abschnitt.

Einleitung zur Algebra . . . . S. 33

IV Abschnitt.

Arithmetische Aufgaben . . . . S. 43

A. Bestimmte Aufgaben.

I. Mit einem Unbekannten . . . S. 43

II. Mit zwey Unbekannten . . . . S. 58

III. Mit drey Unbekannten . . . . S. —

B. Unbestimmte Aufgaben. . . . S. 69

C. Quadratische Aufgaben.

I. Reine quadratische Gleichungen . . S. 78

II. Unreine quadratische Gleichungen . . S. —

V. Abschnitt.

Geometrische Aufgaben . . . . S. 104

Erste Abtheilung.

Die Algebra.

Erster Abschnitt.

Entgegengesetzte Zahlen.

§. 1.

Erklärung. Unter entgegengesetzten Größen versteht man Größen von einerley Art, welche in einer solchen Beziehung gegen einander stehen, daß eine die andere vermindert, oder bisweilen ganz aufhebt.

§. 2.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieses Begriffs (§. 1.) denke man sich Vermögen und Schulden; Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen; Hinaufsteigen und Hinabsteigen u. s. w.

§. 3.

Erklärung. Eine von den beyden entgegengesetzten Größen (§. 1.) nennt man die bejahende oder positive die andere aber die verneinende oder negative, und

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

es ist ganz willkührlich, welche von beyden man als die bejahende, und welche man als die verneinende betrachten will.

§. 4.

Anmerkung. Heißt man das Vermögen (§. 3.) positiv, so sind die Schulden das Negative, und man kann sagen: Schulden sind negatives Vermögen. Aber die Schulden können auch als positiv angenommen werden und dann wird das Vermögen das Negative seyn. Jetzt heißt es: Vermögen sind negative Schulden.

§. 5.

Zusatz. Die negative Größen (§. 3.) sind daher allerdings wirkliche, und nicht etwa blos eingebildete, Größen. Denn jede der beyden entgegengesetzten Größen kann als die negative angesehen werden. Ihre Wesenheit besteht einzig darin, daß sie mit den positiven Größen einen Gegensatz bilden.

§. 6.

Willkührlicher Satz. Da die entgegengesetzten Grössen eine sich gegenseitig zerstörende Beschaffenheit haben (§. 1.) so werden sie am Schicklichsten mit den Zeichen + und — dargestellt; indem sich diese auf Rechnungsarten beziehen, welche sich wechselseitig entgegengesetzt sind. Die positiven Grössen erhalten das Zeichen +, die negativen aber —. Steht vor einer Größe kein Zeichen, so versteht man + darunter.

§. 7.

Grundsätze. I. Gleiche entgegengesetzte Größen zusammengenommen, heben sich vollkommen auf und werden = 0.

So ist + 8 — 8 = 0; + 12 — 12 = 0; + 26 — 26 = 0; u. s. w.

(Erläuterung an obigen (§. 2.) Beyspielen.)

II. Von ungleichen entgegengesetzten Größen, die zusammenkommen, hebt die kleinere, so viel als sie selbst beträgt, in der größeren auf, und der Überschuß ist positiv oder negativ, je nachdem die größere positiv oder negativ war.

Z. B. $+ 15 - 9 = + 6$; $+ 28 - 15 = + 13$; $+ 12 - 11 = + 1$; u. s. f. ferner: $- 10 + 7 = - 3$; $- 30 + 24 = - 6$; $- 9 + 8 = - 1$; u. s. w.

(Erläuterung an obigen (§. 2.) Beysp.)

III. Werden mehrere Größen von einerley Zeichen unter sich zusammengesetzt, so geben alle positive eine positive, alle negative eine negative Summe.

Z. B. $+ 8 + 4 + 10 + 6 = + 28$ und $- 7 - 5 - 10 - 18 = - 40$; u. s. f.

§. 8.

Anmerkung. Da sich die Mengen aller nur denkbaren Größen durch Zahlen darstellen lassen, so kann man die Rechnungsregeln mit entgegengesetzten Größen am Faßlichsten in entgegengesetzten Zahlen entwickeln.

§. 9.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen zu addiren.

Auflösung. I. Man addire alle gegebene positive und alle negative Zahlen (§. 7. I.);

II. Sind beide Summen gleich, so heben sie sich auf (§. 7. I.): sind sie ungleich, so ziehe man die kleinere von der größern ab, und setze dem Unterschiede das Zeichen der größeren vor. (§. 7. II.)

Andere Auflösung. Man schreibe die gegebenen Zahlen paarweise unter einander und befolge bey jedem Paare die Regeln in §. 7. I. und II.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösungen beruht unmittelbar auf den in ihnen angeführten Paragraphen, und bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Beispiele. I. $+7+4-8+12-9+6-20+5-3=+7+4+12+6+5-8-9-20-3=+34-40=-6.$

II. $+8-12-14+7-3$ } zu addiren.
$-9+10-3-7+12$ }

$-1-2-17\quad 0+9$ Summe.

§. 10.

Anmerkung. Das erste Beyspiel (in §. 9.) könnte auch dergestalt berechnet werden, daß man sagte: $+7$ und $+4$ giebt $+11$, dazu -8 giebt $+3$, dazu $+12$ giebt $+15$. u. s. w.

Im zweyten Beyspiele könnte man auch sagen:

$+8-12-14+7-3=-14$
$-9+10-3-7+12=+3$ folglich ist:

$-1-2-17\quad 0+9=-11=-14+3.$

§. 11.

Lehrsatz. Eine positive Zahl abziehen, heißt eine ihr gleiche negative addiren.

Erster Beweis. Durch das Abziehen der positiven Zahl wird die Größe, wovon der Abzug geschehen soll, um so viele Einheiten vermindert, als die abzuziehende enthält. Da nun eben dieses auch durch das Addiren der ihr gleichen negativen geschieht, so ist Jenes mit diesem einerley.

Anderer Beweis. $(+10)-(+6)=(+10-6+6)-(+6)=+10-6=+4.$
Desgleichen $(-12)-(+7)=(-12-7+7)-(+7)=-12-7=-19.$

§. 12.

Lehrsatz. Eine negative Zahl abziehen heißt die ihr gleiche positive addiren.

Beweis. Da die negative Zahl in Bezug auf die positive einen Mangel ausdrückt, und abziehen soviel heißt, als wegnehmen, so ist die Subtraction der negativen Zahl nichts anders, als die Wegnahme des Mangels. Wer aber den Mangel hinwegnimmt, muß etwas wirklich Vorhandenes setzen.

Anderer Beweis. $+15-(-8)=(+15+8-8)-(-8)=+15+8=+23$,

Ferner. $(-7)-(-12)=(-7+12-12)-(-12)=-7+12=+5$.

§. 13.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung. Nachdem man in der abzuziehenden Größe alle Zeichen in die entgegengesetzte verwandelt hat, addire man (§. 9.) die zwey gegebenen Zahlen zusammen, so ist die Subtraction verrichtet.

Beweis. Die abzuziehende Zahl ist entweder eine positive, oder eine negative, folglich wird in jedem Falle (nach §. 11. und 12.) die ihr gleiche engegengesetzte addirt, um den Unterschied zu finden.

Beyspiel. I.

$$\begin{array}{rrrrrr} +8 & -15 & -12 & +9 & -5 & +7 \\ +6 & -4 & +9 & -12 & +20 & -5 \\ - & + & - & + & - & + \\ \hline +2 & -11 & -21 & +21 & -25 & +12. \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\text{II.}\quad -4+1-5-10-8+6-3 \\
\quad -9-8-15+7-9+13-8+6 \\
\quad \underline{+\quad +\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -} \\
\quad +5+9+10-17+1-7+5-6.
\end{array}
$$

§. 14.

Anmerkung. Eine Probe über die Subtraction besteht darin, daß man sowohl die abzuziehende Zahl, als auch jene wovon der Abzug geschehen soll (nach §. 10.) reducirt und die hierdurch erhaltenen zwey Zahlen von einander subtrahirt, wo die Differenz der (nach §. 13.) gefundenen gleich seyn wird. z. B.

$$
\left.\begin{array}{l}
+7-8-3-5+6=-3 \\
+9+4-6+12-3=+16 \\
-\quad -\quad +\quad -\quad +\qquad -
\end{array}\right\}\text{folglich}
$$

$$
-2-12+3-17+9=-19.
$$

§. 15.

Lehrsatz. In der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen ist es einerley, ob die Einheit positiv oder negativ angenommen wird; allein sie muß entweder auf die erste oder auf die andere Art festgesetzt werden.

Beweis. Nimmt man die Einheit positiv an, so sind die positiven Zahlen Mengen dieser positiven Einheit und die negativen Zahlen Mengen ihres Entgegengesetzten. Gerade eben so, nur umgekehrt, ist es, wenn man die Einheit negativ annimmt. Da nun die negativen Zahlen, gleich den positiven, reelle Größen sind, so ist es einerley, welches von beyden man annimmt. Weil es aber widersprechend wäre, die Einheit zugleich positiv und negativ, oder willkührlich bald positiv, bald negativ zu setzen, so muß hierüber etwas Bestimmtes zum Grunde gelegt werden.

§. 16.

Anmerkung. Durch allgemeine Übereinkunft wird die Einheit als positiv angenommen.

§. 17.

Lehrsatz. Zwey positive Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Multipliciren heißt, den Multiplicanden so oft nehmen, als der Multiplicator die Einheit enthält. Ist nun dieser Multiplicator positiv, so enthält er die positive Einheit (§. 16.) selbst mehrmalen, folglich ist auch der Multiplicand selbst, und nicht sein Entgegengesetztes, im Producte enthalten, d. h. das Product muß positiv seyn.

Beyspiele. $+8 \times +6 = +48$; $+12 \times +7 = +84$; $+100 \times +10 = +1000$; u. s. w.

Anderer Beweis. Da sich die positive Größe zur negativen verhält, wie die Bejahung zur Verneinung, so heißt die Multiplication zweyer positiven Größen nichts anders, als die Bejahung bejahen, welches offenbar ein bejahtes, d. h. ein positives Resultat geben muß.

§. 18.

Lehrsatz. Zwey negative Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Der Multiplicand kömmt so oft in das Product, wie oft die Einheit in dem Multiplicator enthalten ist. Nun enthält aber der negative Multiplicator die (positive) Einheit nicht selbst, sondern ihr Entgegengesetztes. Folglich kömmt auch hier der negative Multiplicand nicht selbst, sondern dessen Entgegengesetztes in das Product, d. h. das Product wird positiv.

Beyspiele. $-5 \times -4 = +20$; $-18 \times -6 = +108$; $-40 \times -50 = +2000$; u. s. w.

Anderer Beweis. Da negative Größen Verneinungen ausdrücken, so heißt ein Product aus zwey negativen Factoren soviel, als die Verneinung verneinen, welches eine Bejahung d. h. etwas Positives hervorbringt.

§. 19.

Lehrsatz. Eine positiver Multiplicand und ein negativer Multiplicator geben ein negatives Product.

Beweis. Hier wird der positive Multiplicand so oft genommen, als der negative Multiplicator die Einheit enthält. Nun ist aber die (positive) Einheit nicht selbst in diesem (negativen) Multiplicator enthalten, sondern ihr Entgegengesetztes. Daher kömmt auch der positive Multiplicand nicht selbst in das Product, sondern sein Entgegengesetztes, und dies Product muß negativ seyn.

Beyspiele. $+7 \times -10 = -70$; $+12 \times -4 = -48$; $+12 \times -12 = -144$; u. s. f.

Anderer Beweis. Einen positiven Multiplicanden mit einem negativen Multiplicator multipliciren, heißt soviel, als die Bejahung verneinen, welches nothwendiger Weise eine Verneinung, d. h. etwas Negatives hervorbringt.

§. 20.

Lehrsatz. Ein negativer Multiplicand und ein positiver Multiplicator geben ein negatives Product.

Beweis. Da hier der negative Multiplicand so oft in das Product kömmt, wie oft die Einheit in dem Multiplicator enthalten ist, diese Einheit aber, als eine positive, selbst in dem Multiplicator steckt, so muß auch der negative Multiplicand

selbst in das Product kommen, und dieses Produkt muß negativ seyn.

Beyspiele. $- 8 \times + 5 = - 40$; $- 15 \times + 100 = - 1500$; $- 3 \times + 19 = - 57$; u. s. w.

Anderer Beweis. Das Negative mit dem Positiven multipliciren, heißt soviel, als die Verneinung bejahen, welches allerdings eine Verneinung, d. h. etwas Negatives hervorbringen muß.

§. 21.

Zusatz. Aus dem Bisherigen (§. 17 — §. 20.) folgt die Richtigkeit nachstehender Regel für die Bestimmung der Zeichen des Products: Wenn die Factoren einerley Zeichen haben, so wird das Product positiv; haben sie aber entgegengesetzte Zeichen, so ist das Product negativ.

§. 22.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. I. Man setze zuerst den Multiplicanden, unter ihn den Multiplicator und ziehe einen Absonderungsstrich.

II. Man multiplicire mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators nach und nach jedes einzelne Glied des Multiplicanden und befolge die (§. 21.) bewiesene Regel für die Zeichen.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung ergiebt sich theils aus dem Begriffe der Multiplication, theils aus den oben (§. 17 — §. 20.) bewiesenen Sätzen.

Beyspiele.

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{I.} & -3 & +5 & -6 & -10 & +2 & \text{Multiplicand} \\
 & -4 & +3 & & & & \text{Multiplicator} \\
\hline
 & +12 & -20 & +24 & +40 & -8 & \text{Product.} \\
 & -9 & +15 & -18 & -30 & +6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{II.} & +7 & -3 & -5 & -10 & +8 & \text{Factoren.} \\
 & -4 & +6 & -7 & -3 & & \\
\hline
 & -28 & +12 & +20 & +40 & -32 & \\
 & +42 & -18 & -30 & -60 & +48 & \text{Product.} \\
 & -49 & +21 & +35 & +70 & -56 & \\
 & -21 & +9 & +15 & +30 & -24 &
\end{array}$$

§. 23.

Anmerkung. Eine Probe über die Multplication besteht darin, daß man beyde Factoren (nach §. 10.) auf eine Zahl reducirt und miteinander multiplicirt. Dieses Product muß dann derjenigen Zahl gleich seyn, welche man aus der Reduction aller Glieder des Products erhält; z. B.

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{Multiplicand} & +5 & -8 & +3 & -7 & = -7. \\
\text{Multiplicator} & -6 & +9 & & & = +3. \\
\hline
\text{Product.} & -30 & +48 & -18 & +42 & \multirow{2}{*}{= -21.} \\
 & +45 & -72 & +27 & -63 &
\end{array}$$

Denn das Product ist $= +48 + 42 + 45 + 27 - 30 - 18 - 72 - 63 = 162 - 183 = -21$.

§. 24.

Lehrsatz. Ein positiver Dividend und ein positiver Divisor geben einen positiven Quotienten.

Beweis. Nach dem Begriffe von der Division ist die Einheit so oft in dem Quotienten enthalten, als der Divisor

in dem Dividenden. Ist nun Dividend und Divisor positiv, so ist dieser wirklich ein Theil von jenem, folglich muß auch die (positive) Einheit selbst einen Theil des Quotienten bilden, d. h. der Quotient muß positiv seyn.

Beyspiele. $+ 144 : + 24 = + 6$; $+ 48 : + 8 = + 6$; $+ 7 : + 11 = + \frac{7}{11}$; u. s. f.

Anderer Beweis. Wenn ein positiver Dividend und ein positiver Divisor keinen positiven Quotienten gäben, so müßte dieser negativ seyn. Wäre er aber negativ, so müßte (nach der bekannten Divisionsprobe) der positive Divisor mit dem negativen Quotienten multiplicirt, einen positiven Dividenden geben, welches jedoch (nach §. 21.) unmöglich ist. Folglich ist der Quotient positiv.

§. 25.

Lehrsatz. Aus einem negativen Dividenden und einem negativen Divisor entspringt ein positiver Quotient.

Beweis. Da hier der negative Divisor selbst in dem negativen Dividenden enthalten ist, so muß auch die (als positiv angenommene) Einheit selbst in dem Quotienten enthalten, d. h. dieser Quotient muß positiv seyn.

Beyspiele. $- 72 : - 9 = + 8$; $- 1000 : - 10 = + 100$; $- 3 : - 7 = + \frac{3}{7}$; u. s. f.

Anderer Beweis. Entstände aus einem negativen Dividenden und einem negativen Divisor kein positiver Quotient, so müßte er negativ seyn. Wäre er aber negativ, so müßte dieser negative Quotient mit dem negativen Divisor multiplicirt, einen negativen Dividenden geben, welches (nach §. 21.) unmöglich ist. Also muß der Quotient positiv seyn.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn der Dividend positiv und der Divisor negativ ist, so wird der Quotient negativ.

Beweis. Weil in diesem Falle der negative Divisor nicht selbst in dem positiven Dividenden enthalten ist, sondern dessen Entgegengesetztes, so kömmt auch hier die (positive) Einheit nicht selbst, sondern ihr Entgegengesetztes in den Quotienten, und dieser Quotient muß negativ werden.

Beyspiele. $+20 : -5 = -4$; $+60 : -12 = -5$; $+7 : -10 = -\frac{7}{10}$; u. s. w.

Anderer Beweis. Sollte der hier entstehende Quotient nicht negativ seyn, so müßte er positiv werden. Wäre er aber positiv, so müßte er, mit einem negativen Divisor multiplicirt, ein positives Product (den positiven Dividenden) geben, welches (§. 21.) widerspricht. Also ist der Quotient negativ.

§. 27.

Lehrsatz. Ein negativer Dividend und ein positiver Divisor geben einen negativen Quotienten.

Beweis. Da hier der negative Dividend den positiven Divisor nicht selbst enthalten kann, sondern sein Entgegengesetztes, so kann auch in dem Quotienten die (positive) Einheit nicht selbst, sondern es muß ihr Entgegengesetztes darin enthalten seyn, d. h. der Quotient muß negativ werden.

Beyspiele. $-21 : +7 = -3$; $-36 : +18 = -2$; $-8 : +13 = -\frac{8}{13}$; u. s. w.

Anderer Beweis. Sollte ein negativer Dividend und ein positiver Divisor keinen negativen Quotienten geben, so müßte er positiv seyn, und es würde das Product aus dem positiven Quotienten und dem positiven Divisor den negativen Dividenden hervorbringen; welches (nach §. 21.) unmöglich ist. Folglich muß der Quotient negativ seyn.

§. 28.

Anmerkung. Aus den bisher erwiesenen Sätzen (§. 24 — §. 27.) folgt die Richtigkeit der nachstehenden Regel für die Division: Wenn Dividend und Divisor gleiche Zeichen haben, so wird der Quotient positiv, haben sie aber entgegengesetzte, so wird der Quotient negativ.

§. 29.

Aufgabe. In entgegengesetzten Zahlen die Division zu verrichten.

Auflösung. Man dividire mit den Ziffern des Divisors auf die gewöhnliche Weise in jene des Dividenden und bestimme sodann die Zeichen der Quotienten (nach §. 28.)

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruhet theils auf den gewöhnlichen Regeln der Division, theils auf der bewiesenen Regel (§. 28.)

Beyspiele. I.

Divis.	Dividend	Quotient
-4	$-12+20-48-60+36$	$(+3-5+12+15-9)$

II.

$$\frac{-18+12-6}{-3} = +6-4+2.$$

III.

Divis.	Dividend	Quotient
$+5$	$-20-60+3-100-2$	$(-4-12+\frac{3}{5}-20-\frac{2}{5})$

IV.

Divisor	Dividend	Quotient
$-3+2$	$+12-21-36-8+14+24$	$(-4+7+12$
	$+12 \quad -8$	
	$-21-36+14+24$	
	$-21 \quad +14$	
	$-36+24$	
	$-36+24$	
	$0 \quad 0$	

§. 30.

Zusatz. Auch über die Division läßt sich eine Probe anstellen, welche der oben (§. 23.) angeführten ähnlich ist. Wenn man nämlich den reducirten Divisor in den reducirten Dividenden dividirt, so muß der reducirte Quotient hieraus hervorgehen. Z. B. diene das

IV. Beyspiel des vorhergehenden §. Hier ist der Divisor $= -3+2 = -1$, der Dividend $= +12-21-36-8+14+24 = +12+14+24-21-36-8 = +50-65 = -15$, und der Quotient $= -4+7+12 = +15$. Wirklich ist aber auch $\frac{-15}{-1} = +15$.

Zweyter Abschnitt.

Buchstabenrechnung.

§. 31.

Erklärung. Die Buchstabenrechnung ist jener Theil der Arithmetik, welcher sich, statt der Ziffer, der Buchstaben bedient.

§. 32.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Erklärung bemerke man Folgendes. Die gewöhnliche Arithmetik rechnet mit Ziffern, d. h. mit einzelnen, durch das Decimalzahlengesetz bestimmten Mengen von Einheiten. Die Zifferrechnung kann sich daher in ihren Anwendungen nicht über diese einzelne Fälle erheben, d. h. sie kann als solche keine allgemeine Resultate geben. Da es nun in der ganzen Größenlehre äusserst wichtig ist, dergleichen allgemeine Gesetze aufzufinden, welche, als Regeln, eine oft unendliche Menge von besonderen Fällen unter sich begreifen, so war es ein großes Bedürfniß für die Ausbildung der Mathematik, anstatt der besondern (Zahlen-) Rechenkunst eine allgemeine (Buchstaben-) Arithmetik zu entwerfen. Wie dieses möglich sey, und was diese allgemeine Rechenkunst leiste, wird die Folge lehren.

§. 33.

Willkührlicher Satz. Man wähle anstatt der Zifferschrift der gewöhnlichen Arithmetik eine Buchstabenschrift, d. h. man lasse die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c, d u. s. f. Zahlen überhaupt bedeuten, die nicht, wie die Ziffer, ihren Werth von ihrer Stelle ha-

ben, sondern deren Werth theils von den Bedingungen der Aufgabe, theils von der Willkühr des Rechnenden abhängt. Werden nun dergleichen Buchstaben durch die arithmetischen Zeichen gehörig verbunden, so entspringen daraus Ausdrücke in Buchstaben (Formeln), welche als allgemeine Regeln für eine unendliche Menge von einzelnen Fällen gelten, wenn man, statt der Buchstaben in ihnen, bestimmte Zahlen setzt.

§. 34.

Zusätze. I. Da man sich unter a irgend eine positive Zahl vorstellen kann, und unter b jede andere positive, welche von a verschieden ist, so wird $a + b$ der allgemeine Ausdruck einer jeden Summe seyn, welche aus zwey positiven Zahlen besteht.

II. Auf gleiche Weise stellt $a - b$ jede Differenz zweyer positiven Größen dar.

III. Auch drückt $a \times b$ (wofür man auch $a.b.$ oder blos ab setzt) jedes Factum aus zwey positiven Factoren aus.

IV. Endlich stellt $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ einen jeden Quotienten oder jeden Bruch im Allgemeinen dar.

§. 35.

Erklärung. Unter dem Coefficienten eines Buchstaben versteht man diejenige Ziffer, welche zur Linken des Buchstaben gesetzt wird, und anzeigt, wie oft dieser Buchstabe zu sich selbst gesetzt werden soll. Diese Coefficienten dienen daher zur Abkürzung der Schreibart. Z. B. in dem Ausdrucke $3a$ heißt 3 der Coefficient von a und bedeutet, daß der Buchstabe a dreymal zu sich selbst gesetzt werden soll. Es ist nämlich $3a = a + a + a$. Ferner ist $5bc = bc + bc +$

$bc + bc + bc$; $2m = m + m$; $-4d = (-d) + (-d) + (-d) + (-d)$; u. s. w.

Der Exponent eines Buchstaben ist jene Ziffer, welche zur Rechten desselben in die Höhe gesetzt wird und andeutet, wie oft dieser Buchstabe als Factor gesetzt ist. Sie sind daher ebenfalls eine Abkürzung der Schreibart. Denn a^3 heißt soviel, als a mal a mal a, d. h. $a^3 = a \times a \times a$. Ferner ist $b^5 \times = b \times b \times b \times b \times b$ u. s. f.

§. 36.

Aufgabe. Die Addition in Buchstabengrößen zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die gegebenen Buchstabengrößen sich auf verschiedene Buchstaben beziehen, so werden sie addirt, indem man diese alle mit ihren Zeichen und etwaigen Coefficienten nebeneinander schreibt und dabey die Ordnung des Alphabets beobachtet.

II. Kommen die nämlichen Buchstaben mehrmals vor, so setze man die gleichnamigen unter einander, addire ihre etwaige positive oder negative Coefficienten nach den oben (§. 9.) gegebenen Regeln, und schreibe, wenn ihre Summe nicht $= o$ wird, zu derselben diesen Buchstaben einmal.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist theils für sich selbst einleuchtend, theils folgt sie aus den oben (§. 9.) bewiesenen Sätzen.

Beyspiele. I. Man soll folgende Größen: $3a$, b, $-3c$, d und $-f$ addiren, so ist die Summe: $3a + b - 3c + d - f$.

II. Es soll addirt werden: a und $\frac{m}{n}$ und $3b$ und $-d$, so ist die Summe $a + 3b - d + \frac{m}{n}$, u. s. f.

III. Zu $3a - b + 3g - d + 2f$ sollte addirt werden $+ 5b - 2a - 5f - g + 3d$, so ordne man zuerst diese Größen gehörig, wie folgt:

$$\begin{array}{r} 3a - b - d + 2f + 3g \\ - 2a + 5b + 3d - 5f - g \\ \hline a + 4b + 2d - 3f + 2g. \end{array}$$

nun reducire man

Summe

IV.
$$\left.\begin{array}{r} 2a - 3b + 2d - g \\ - 5a + 4b - 2d + 2g \\ 4a - b + d \\ - 2a + 2b + 2d - h \end{array}\right\} \text{Zu addiren}$$
$$- a + 2b + 3d + g - h. \text{ Summe.}$$

V.
$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - bc \\ - a - 5b \end{array}\right\} \text{Zu addiren}$$
$$2a - 3b - bc. \text{ Summe.}$$

§. 37.

Anmerkung. Zur Erläuterung und Probe der Addition in Buchstaben kann man denselben bestimmte Zahlenwerthe geben. Nennt man z. B. im letzten Beyspiel des vorigen §. a Gulden, b Kreuzer und c Pfennige, so wäre $3a + 2b - 6c = 3$ fl. $+ 2$ kr. $- 6$ pf. $= + 722$ pf.; ferner $- a - 5b = - 260$ pf., folglich die Summe $= 722 - 260 = 462$ Pf. Nun ist aber auch $2a - 3b - 6c = 2$ fl. $- 3$ kr. $- 6$ Pf. $= 462$ Pf. wie vorhin.

§. 38.

Aufgabe. Die Subtraction in Buchstaben zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die abzuziehende Größe keine Buchstaben mit der, wovon der Abzug geschehen soll, gemeinschaftlich hat, so verändere man in jener die Zeichen in die entgegengesetzte und ordne nun alle Buchstabengrößen nach dem Alphabete.

II. Befinden sich in beyden Größen gemeinschaftliche Buchstaben, so ordne man zuerst beyde nach dem Alphabete, setze die abzuziehende unter die andere, verändere in jener die Zeichen und befolge nun die Regeln der Addition. (§. 36.)

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils auf einleuchtenden Sätzen, theils auf den oben (§. 13.) erwiesenen Lehren von der Subtraction der entgegengesetzten Zahlen.

Beyspiele. I. Man soll von $a + 3b - d$ abziehen $- m + c - g$, so ist $(a + 3b - d) - (- m + c - g) = (a + 3b - d) + (m - c + g) = a + 3b - c - d + m + g$ die richtige Differenz.

II. Von $- g + 3f + 4a$ soll man abziehen $- 2b + 3d - c + h$, so ist $(- g + 3f + 4a) - (- 2b + 3d - c + h) = (- g + 3f + 4a) + (+ 2b - 3d + c - h) = 4a + 2b + c - 3d + 3f - g - h$.

III. Von $3b - 4c + 5a - d + 2g$ soll abgezogen werden $- 3g + 2a - 4b + d - 3c + f$, so ist die Rechnung diese:

$$\left.\begin{array}{l} +5a+3b-4c-d+2g \\ +2a-4b-3c+d-3g+f \\ -\quad+\quad+\quad-\quad+\quad- \end{array}\right\}\text{Geordnet}$$

$$+3a+7b-c-2d+5g-f. \quad \text{Differenz.}$$

IV. Von $12a-8b+7c-4d+g$ soll man abziehen $15a-8b-9c-6d$.

Dies giebt:

$$\begin{array}{l} 12a-8b+7c-4d+g \\ 15a-8b-9c-6d \\ -\quad+\quad+\quad+ \\ \hline -3a \quad * \quad +16c+2d+g. \quad \text{Unterschied.} \end{array}$$

§. 39.

Aufgabe. Potenzen, deren Wurzeln durch Buchstaben ausgedrückt sind, mit einander zu multipliciren.

Auflösung. I. Wenn die Potenzen verschiedene Wurzeln haben, so werden die Factoren nur mit dem Multiplicationszeichen zusammengesetzt und die Multiplication blos angedeutet.

II. Sind hingegen Potenzen mit einerley Wurzeln zu multipliciren, so setze man die Wurzel einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher der Summe der gegebenen Exponenten der Factoren gleich ist.

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Regel versteht sich von selbst, und jene der zweyten ergiebt sich aus der Bedeutung der Exponenten (in §. 35.) wie nachstehende Beyspiele noch mehr erläutern werden.

Beyspiele. I. $a^2 \times b^3 = a^2b^3$; $a^2 \times b^2 + c^3 = a^2b^2c^3$; $a^n \times b^m = a^n b^m$; u. s. f.

II. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$; denn $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$; $b^3 \times b^4 = b^7$; $d^n \times d^m = d^{n+m}$, u. s. w.

§. 40.

Aufgabe. Eine Potenz auf eine neue Potenz zu erheben.

Auflösung. Man setze die Wurzel und gebe ihr einen Exponenten, welcher dem Producte beyder Exponenten gleich ist.

Beweis und Beyspiele. $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$. Denn $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$. Ganz allgemein ausgedrückt ist $(a^n)^m = a^{nm}$; u. s. f.

§. 41.

Aufgabe. Ein Product mit mehreren Factoren auf eine verlangte Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe jeden Factor dieses Productes zur verlangten Potenz und multiplicire diese Potenzen miteinander.

Beweis und Beyspiele. $(ab)^3 = a^3 b^3$. Denn $(ab)^3 = ab.\ ab.\ ab = aaabbb = a^3 b^3$. Ganz allgemein ist $(ab)^n = a^n b^n$.

§. 42.

Aufgabe. Einen Bruch auf eine bestimmte Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe Zähler und Nenner des Bruchs zur gegebenen Potenz, so ist die Aufgabe aufgelößt.

Beweis u. Beyspiele. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$. Allgemein ist wieder $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, u. s. f.

§. 43.

Aufgabe. Die Multiplication in Buchstaben zu verrichten, wenn Multiplicand und Multiplicator aus mehreren Buchstabengrößen bestehen.

Auflößung. I. Man ordne beyde Factoren nach alphabetischer Aufeinanderfolge der Buchstaben, schreibe sie untereinander, und ziehe einen Strich.

II. Man multiplicire jedes einzelne Glied des Multiplicanden mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators, indem man *a*) die Zeichen (nach §. 21.) bestimmt, *b*) die etwaigen Coefficienten zusammen multiplicirt und *c*) wegen der Buchstaben den obigen Regeln (§. 39—42.) folget.

III. Werden nun diese erhaltene Theilfacta (nach §. 36.) addirt, so ist diese Summe das verlangte Product.

Beweis. Das Verfahren der Auflösung ist theils durch sich selbst, theils durch die in derselben angeführten Vordersätze gerechtfertigt.

Beyspiele. I.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \end{array}\Big\} \text{ Factoren}$$

$$\text{Theilproducte} \left(\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad\;\; + ab + b^2 \end{array} \right.$$

$$\overline{a^2 + 2ab + b^2} \text{ Product.}$$

II.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \end{array}\Big\} \text{ Factoren}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - ab \\ \quad\;\; - ab + b^2 \end{array} \right\} \text{ Theilfacta}$$

$$\overline{a^2 - 2ab + b^2} \text{ Hauptproduct.}$$

III.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \end{array}\Big\} \text{ Factoren}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad\;\; - ab - b^2 \end{array} \right\} \text{ Theilfacta}$$

$$\overline{a^2 - b^2} \text{ Hauptproduct.}$$

IV.

$$\begin{array}{r} a + b - d \\ a - b - d \end{array}\Big\} \text{ Faktoren.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + ab - ad \\ \quad\;\; - ab - b^2 + bd \\ \quad\quad\quad\;\; - ad - bd + d^2 \end{array} \right\} \text{ Theilfacta.}$$

$$\overline{a^2 - 2ad - b^2 + d^2} \text{ Product.}$$

V. $\begin{array}{l} 5a - 2b - d \\ 2a + 3b - 2d \end{array}$

$$\begin{array}{l} 10a^2 - 4ab - 2ad \\ \quad 15ab - 6b^2 - 3bd \\ \quad\quad -10ad + 4bd + 2d^2 \\ \hline 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2. \end{array}$$

VI. $\begin{array}{l} a^2 - 3b^2 + 2c - d \\ 3a + 2b^3 - c^2 \end{array}$

$$\begin{array}{l} 3a^3 - 9ab^2 + 6ac - 3ad \\ \quad +2a^2b^3 - 6b^5 + 4b^3c - 2b^3d \\ \quad\quad - a^2c^2 + 3b^2c^2 - 2c^3 + c^2d \\ \hline 3a^3 - 9ab^2 + 2a^2b^3 + 6ac - a^2c^2 - 3ad - 6b^5 \\ + 4b^3c + 3b^2c^2 - 2b^3d - 2c^3 + c^2d. \end{array}$$

VII. $\begin{array}{l} 6a^n - 2b^m \\ 4a^n + 3b^n \end{array}$

$$\begin{array}{l} \hline 24a^{2n} - 8a^nb^m + 18a^nb^n - 6b^{m+n}. \end{array}$$

§. 44.

Aufgabe. Potenzen, deren Wurzeln Buchstabengrößen sind, durch einander zu dividiren.

Auflösung. I. Wenn die Wurzeln verschieden sind, so kann man die zu verrichtende Division nur andeuten.

II. Sollen hingegen Potenzen von einerley Wurzeln unter einander dividirt werden, so setze man die gemeinsame

Wurzel nur einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher dem Unterschiede der Exponenten des Divisors von jenem des Dividenden gleich ist.

Beweis. Die Gültigkeit der ersten Regel leuchtet von selbst ein; jene der zweyten ergiebt sich aus der Bedeutung der Exponenten (§. 35.) und wird noch deutlicher durch das Beyspiel werden.

Beyspiele. I. Wenn a^3 durch b^2 dividirt werden soll, so ist der Quotient $a^3 : b^2$, oder auch $\frac{a^3}{b^2}$. Allgemein giebt a^n durch b^m dividirt den Quotienten $a^n : b^m$ oder $\frac{a^n}{b^m}$.

II. $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$. Denn es ist $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$. Allgemein wird $a^m : a^n = a^{m-n}$.

§. 45.

Lehrsatz. Jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich.

Beweis. $a^n : a^n = a^{n-n}$ (§. 44.) $= a^0$. Allein $a^n : a^n = 1$, da jede Größe sich selbst einmal mißt. Daher auch $a^0 = 1$. Auf gleiche Weise ist $8^0 = 1$; $1000^0 = 1$; $8746^0 = 1$; u. s. f.

§. 46.

Lehrsatz. Größen mit negativen Exponenten sind ächten Brüchen gleich, deren Zähler 1, und deren Nenner eben diese Größen mit gleichen positiven Exponenten sind.

Beweis. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Denn es ist $a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$ (§. 11.) Allein $a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n}$ (§. 39. II.) $= \frac{1}{a^n}$. Folglich muß auch $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ seyn.

Beyspiele. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; u. s. f.

§. 47.

Anmerkung. Da $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ u. s. f., $10^0 = 1$, (§. 45.) und $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ (§. 46.) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$; $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$ u. s. w., so kann man jede gemischte Zahl, welche aus Ganzen und Decimalbrüchen besteht, durch Ziffer ausdrücken, welche in lauter Potenzen von 10 multiplicirt sind. So ist z. B. $7345,8296 = 7 \times 10^{+3} + 3 \times 10^{+2} + 4 \times 10^{+1} + 5 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$ u. s. f.

§. 48.

Lehrsatz. Größen mit gebrochenen Exponenten sind Wurzelgrößen, bey welchen des Exponenten Nenner den Grad der Wurzel, dessen Zähler hingegen den Grad der Potenz der gegebenen Größe bezeichnet. Z. B. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beweis. $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$ (§. 40.) Allein $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$. Denn $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{m}{m}}$ (§. 40.) $= a^1 = a$. Eben so ist auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$. Folglich ist $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, und daher auch $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beyspiele. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{b^4}$; $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{c}$; $d^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{d}$; $256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = 4$; u. s. w.

§. 49.

Aufgabe. Die Division in Buchstaben zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn Dividend und Divisor keine gemeinschaftliche Buchstaben enthalten, so läßt sich die Division nur bruchweise andeuten.

II. Besteht der Divisor aus einem Buchstaben, der auch zugleich in den Gliedern des Dividenden vorkömmt, so vergleiche man den Divisor mit jedem Gliede dieses Dividenden, bestimme das Zeichen nach (§. 28.) und setze jene Buchstaben, welche dieses Glied mehr als der Divisor enthält, in den Quotienten.

III. Wenn Dividend und Divisor aus mehreren Gliedern von zum Theil gleichen Buchstaben, mit verschiedenen Zei-

chen, Coefficienten und Exponenten bestehen, so ordne man zuerst die Buchstaben in beyden nach dem Alphabete, bestimme aus dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden den Quotienten, indem man *a.*) die Zeichen nach (§. 28.) setzt, *b.*) mit dem etwaigen Coefficienten des Divisors in jenen des Dividenden dividirt, *c.*) die gemeinschaftlichen Buchstaben von beyden im Quotienten wegläßt und *d.*) wenn etwa Potenzen von gleichen Wurzeln zu dividiren sind, den obigen Regeln (§. 44.) folget.

IV. Mit dem (nach III.) jedesmal gefundenen Theile des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor und subtrahire dieses Product von den gehörigen Theilen des Dividenden, bis entweder die Division sich schließt, oder am Ende ein Rest bleibt, den man in Form eines Bruchs zu schreiben pflegt.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Vorschriften beruht theils auf bekannten Lehren von der Division, theils auf den in der Auflösung selbst bemerkten Sätzen.

Beyspiele. I. Es soll $a - b + c$ durch $m + n$ dividirt werden, so setze man $\frac{a - b + c}{m + n}$ als Quotienten u. s. w.

	Divisor	Dividend	Quotient
II.	a	$3a - a^2 + 4ab - ad$	$3 - a + 4b - d$

	Divisor.	Dividend.	Quotient.
III.	$-b$	$-ab + 3b^2 - 4bd + c$	$+a - 3b + 4d + \frac{c}{-b}$

IV. $a + b \mid a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b$

$$\begin{array}{ll} a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline \quad\quad ab + b^2 \\ \quad\quad ab + b^2 \\ \hline \quad\quad 0 \quad\quad 0 \end{array}$$

V. $a - b \mid a^2 - b^2 \mid a + b$

$$\begin{array}{l}
a^2 - ab \\
\hline
+ ab - b^2 \\
+ ab - b^2 \\
\hline
\quad 0 \quad\; 0
\end{array}$$

VI. $a + b - d \mid a^2 - 2ad - b^2 + d^2 \mid a - b - d$

$$\begin{array}{l}
a^2 + ab - ad \\
\hline
- ab - ad - b^2 \\
- ab - b^2 + bd \\
\hline
- ad - bd + d^2 \\
- ad - bd + d^2 \\
\hline
\quad 0 \quad\; 0 \quad\; 0
\end{array}$$

VII.

$$
\begin{array}{l}
2a + 3b - 2d \mid 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \mid 5a - 2b - d \\
\qquad\qquad\qquad 10a^2 + 15ab - 10ad \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad - 4ab - 2ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 4ab \qquad\quad - 6b^2 + 4bd \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2ad - 3bd + 2d^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2ad - 3bd + 2d^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

VIII.

$$
\begin{array}{l}
a - b \mid a^3 - b^3 \mid a^2 + ab + b^2 \\
\qquad\quad a^3 - a^2b \\
\hline
\qquad\qquad + a^2b - b^3 \\
\qquad\qquad\quad a^2b - ab^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad ab^2 - b^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{IX.}\quad 1 - 2x + x^2 \mid 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \mid 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; \underline{1 - 2x + x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 3x + 9x^2 - 10x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{- 3x + 6x^2 - 3x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x^2 - 6x^3 + 3x^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - x^3 + 2x^4 - x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- x^3 + 2x^4 - x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad\; 0 \quad\; 0
\end{array}
$$

Zur fernern Übung noch folgende (aus Maler's Algebra, fünfte Auflage, 1810 S. 26. genommene) etwas mehr zusammengesetzte Beyspiele:

X. $24a^{2m} + 22a^m b^n + 4b^{2n} - 24a^m c + 8a^m - 6b^n c^3 - 8b^n c + 2b^n + 12c^4 - 4c$
$: 4a^m + b^n - 2c = 6a^m + 4b^n - 6c^3 + 2.$

XI. $21a^4a^m + 63a^4b^n - 36a^m b^m + 48a^m c^n - 108b^m b^n - 56a^4c^x + 144b^n c^n + 96b^m c^x - 128c^n c^x$
$: 3a^m + 9b^n - 8c^x = 7a^4 - 12b^m + 16c^n.$

XII. $44a^{2m+2} + 22a^{m+1}b^3 - 48a^{m+1}b^7 - 24b^{10} + 64a^{m+1}c^{m+n} + 32b^3c^{m+n}$
$: 4a^{m+1} + 2b^3 = 11a^{m+1} - 12b^7 + 16c^{m+n}.$

XIII. $35a^{2n-2} - 84a^{n-1} + 25a^{n-1}b - 60b + 20a^{n-x}c^{m-x} - 48c^{m-x}$
$: 7a^{n-1} + 5b + 4c^{m-x} = 5a^{n-1} - 12.$

XIV. $x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394 : x^2 + 2x - 99$
$= x^3 - 2x^2 + 103x - 206.$

Dritter Abschnitt.

Einleitung zur Algebra.

§. 50.

Erklärung. Eine Gleichung nennt man einen Ausdruck, worin einerley Größe auf zwey verschiedene Arten dargestellt wird. Die durch das Zeichen der Gleichheit getrennten Stücke der Gleichung heißen ihre Theile, und die in den Theilen etwa durch die Zeichen + und — abgesonderten Größen werden ihre Glieder genannt.

§. 51.

Anmerkung. Da sich die Größe 7 durch 3 + 4 und auch durch 12 — 5 darstellen läßt, so ist der Ausdruck 3 + 4 = 12 — 5 eine Gleichung. Ihre Theile sind 3 + 4 und 12 — 5; die Zahlen 3, 4, 12 und 5 aber heißen ihre Glieder. Andere Beyspiele sind: $3 \times 8 = 20 + 4$; oder $48 : 6 = 12 - 6 + 2$, oder $3^2 + 5 = 8 + 6$, u. s. w. Allgemein ausgedrückt: $a + b - c = 3g - h$, oder $a^2 - 3b = \frac{h}{g} + f$, oder $2b^3 - 4a = \sqrt{c} + 3g$, u. s. f.

§. 52.

Erklärung. Die Algebra ist derjenige Theil der Mathematik, welcher aus gegebenen Eigenschaften bekannter Größen die unbekannten durch Hülfe der Gleichungen finden lehrt.

§. 53.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieses Begriffs (§. 52.) folgende einfache algebraische Frage: Was wird es für eine Zahl seyn, deren Hälfte, Drittheil und Vierttheil zusammengenommen die Zahl selbst um eins übertreffen? Die Auflösung davon siehe unten (§. 69.)

(Andere Beyspiele in den Vorlesungen.)

§. 54.

Willkührlicher Satz. Da in den algebraischen Gleichungen (§. 50.) bekannte Größen mit unbekannten verbunden sind, so ist es nöthig, diese von jenen auf eine bestimmte Art zu unterscheiden. Man bezeichnet daher die bekannten Größen mit den ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, a, b, c, d u. s. f. die unbekannten hingegen mit den letzten Buchstaben x, y, z u. s. f. So bedeuten in der Gleichung $3a + b^2 - f = d + x$, die Buchstaben a, b, f und d die bekannten Größen, x hingegen ist das Unbekannte.

§. 55.

Erklärung. Die Gleichungen werden auf verschiedene Weise eingetheilt. Hier bemerken wir folgende Gattungen. Eine Gleichung heißt bestimmt, wenn nur ein Unbekanntes in ihr vorkömmt; obgleich dasselbe mehrmals wiederholt wäre. Z. B. die Gleichungen: $a + bx = d + g$;

$x + a = 3x - b$; $x^2 - 2x + a = b + 3c$ sind bestimmte. Eine unbestimmte Gleichung ist jene, welche zwey oder mehrere Unbekannte enthält; z. B. folgende: $a + 2x - y = b - 3d$; $2x + y = 3a - z$; $\frac{a}{b} + x - y = cz$, u. s. f.

§. 56.

Erklärung. Sowohl die bestimmten als die unbestimmten Gleichungen (§. 55.) werden in verschiedene Ordnungen oder Grade eingetheilt. Eine Gleichung heißt von der ersten Ordnung oder vom ersten Grade, wenn das Unbekannte darin sich in der ersten Potenz befindet; z. B. folgende: $bx = a - b$; oder $2y - a = b + c - d$. In einer Gleichung von der zweyten Ordnung oder vom zweyten Grade, welche man auch eine quadratische nennt, ist das Unbekannte auf der zweyten Potenz, oder es sind zwey Unbekannte durch Multiplication mit einander verbunden; z. B. $x^2 + ax = b$, oder $3x^2 - a = b - d$; oder $a + xy = \frac{b - c}{2}$ u. s. f. Auf ähnliche Weise giebt es Gleichungen vom dritten Grade, welche auch cubische heißen, u. s. f. Eine quadratische Gleichung heißt rein, wenn sie das Unbekannte allein auf der zweyten Potenz enthält; z. B. $x^2 + a = b - c$, oder auch $3y^2 = 2a - \frac{b}{2}$ u. s. f.; unrein hingegen, wenn sie außer dem Quadrate der unbekannten Größe dieselbe noch in der ersten Potenz enthält. So ist $x^2 + 3x = b$, oder $3y^2 - ay = d$, oder $2y^2 - by - c = d + y$ eine unreine quadratische Gleichung.

§. 57.

Zusatz. Aus den bisherigen Erklärungen (§. 55. u. 56.) ergiebt es sich nun auch, was eine einfache bestimmte, eine einfache unbestimmte, eine bestimmte oder unbestimmte quadratische Gleichung u. s. f. sey. (Beyspiele darüber in den Vorlesungen.)

§. 58.

Anmerkung. Da alle algebraische Aufgaben durch Gleichungen aufgelößt werden, welche die Bedingnisse jener Aufgaben vollkommen genau enthalten, so ist es gewöhnlich, diese Aufgaben selbst, so wie die Gleichungen einzutheilen. Hieraus ergiebt es sich, was man eine bestimmte oder unbestimmte, eine einfache oder quadratische Aufgabe u. s. w. nennt.

§. 59.

Erklärung. Eine Gleichung auflösen heißt, den Werth der unbekannten Größen in ihr bestimmen. Enthält die Gleichung nur ein Unbekanntes, so ist sie aufgelößet, wenn man dasselbe in den einen Theil der Gleichung allein bringen kann. Denn nun befinden sich in dem andern Theile nur bekannte Größen, welche, gehörig verbunden, dem Werthe des Unbekannten gleich sind. Z. B. in der Gleichung $x = a + 3b - \frac{n}{m}$ ist der Werth von x bekannt, da die Größen a, b, n und m bekannte Größen sind; diese Gleichung ist also eine aufgelößte. Die Fälle, wo in einer Gleichung zwey oder mehrere Unbekannte vorkommen, werden wir unten besonders betrachten.

§. 60.

Aufgabe. Die allgemeinsten Mittel anzugeben, worauf die Absonderung der bekannten Größen von den unbekannten in den Gleichungen beruhet.

Auflösung. Diese Mittel sind folgende:

I. Man setze beyden Theilen der Gleichung einerley Größe zu, oder nehme einerley Größe von beyden Theilen hinweg.

II. Man multiplicire beyde Theile der Gleichung mit einerley Größe, oder dividire beyde durch Einerley.

III. Man erhebe beyde Theile zu Potenzen von einerley Graden, oder ziehe aus beyden Theilen die Wurzeln von gleichen Graden.

Beweis. Die Richtigkeit dieser drey Regeln beruhet auf dem einfachen Grundsatze: wenn man mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vornimmt, so erhält man wieder gleiche Größen.

Beyspiele. I. Die Gleichung sey
$x + a = d$. Wird hier
$a = a$ beyderseits abgezogen, so bleibt

$x = d - a$, und die Gleichung ist aufgelößet, da die bekannte Differenz von $d - a$ dem Werthe von x gleich ist.

II. In der Gleichung:
$y - b = a + c$, setze man
$b = b$ und addire beyderseits, so ist

$y = a + c + b$, folglich der Werth von y bekannt.

III. In $\frac{x}{a} = b - c$, multiplicire man beyderseits mit a, so wird $x = a \times (b - c)$, oder $x = ab - ac$, und der Werth von x ist bestimmt.

IV. Es sey $by = a + b$, so dividire man beyde Theile der Gleichung mit b, so erhält man $y = \frac{a + b}{b}$, oder $y = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}$, oder $y = \frac{a}{b} + 1$, und die Gleichung ist aufgelößt.

V. Wäre $\sqrt{x} = a + b$, so würde man beyde Theile zum Quadrate erheben, und es würde $x = (a + b)^2$, oder $x = a^2 + 2a\,b + b^2$, wodurch die Gleichung aufgelößt ist.

VI. Hätte man $x^2 = b - c$, so müßte man aus beyden Theilen die Quadratwurzel ziehen. Dies giebt $x = \sqrt{(b - c)}$, und der Werth von x ist bestimmt.

§. 61.

Zusatz. Aus diesen einfachen Beyspielen (§. 60.) fließen folgende Regeln zur Absonderung der bekannten von den unbekannten Größen:

I. Jede Größe kann aus einem Theile der Gleichung in den andern, der Gleichheit unbeschadet, mit dem entgegengesetzen Zeichen übertragen werden.

II. Jeder Factor oder Divisor einer Größe fällt weg; indem man jedes andere Glied der Gleichung mit demselben dividirt oder multiplicirt.

§. 62.

Zusatz. Zur Uebung in der Auflößung der Gleichungen sollen hier einige mehr zusammengesetzte Fälle betrachtet werden.

I. $\frac{x}{a} + b - d = c.$

Alles mit a multiplicirt giebt

$$x + ab - ad = ac.$$

Durch Uebertragung von $+ ab$ wird

$$x - ad = ac - ab.$$

Durch Uebertragung von $- ad$ erhält man

$$x = ac - ab + ad;$$

Da nun a gemeinschaftlicher Factor ist, so wird

$$x = (c - b + d)\ a.$$

II. In $ay + \frac{b}{c} = n,$

trage man $\frac{b}{c}$ hinüber. Dies giebt

$$ay = n - \frac{b}{c}.$$

Dividirt man nun Alles mit a, so wird

$$y = \frac{n}{a} - \frac{b}{ac}.$$

III. Es sey $3x + ax = b - c$, so setze man x als gemeinschaftlichen Factor, und es wird

$$(3 + a)\ x = b - c.$$

Wird nun alles mit $3 + a$ dividirt, so hat man

$$x = \frac{b - c}{3 + a}.$$

IV. Man habe $3x - \frac{a}{b} = x + d$, so wird durch Uebertragung von x

$$3x - x - \frac{a}{b} = d$$

Die Uebertragung von $-\frac{a}{b}$ giebt

$$3x - x = d + \frac{a}{b}.$$

Reducirt man die x, so ist

$$2x = d + \frac{a}{b}.$$

Dividirt man nun alles durch 2, so wird

$$x = \frac{d}{2} + \frac{a}{2b}.$$

V. Es sey $\frac{ax}{b} = c + \frac{dx}{n}$, so wird durch Multiplication mit b

$$ax = bc + \frac{bdx}{n}$$

und durch Multiplication mit n

$$anx = bcn + bdx.$$

Die Uebertragung von bdx giebt

$$anx - bdx = bcn$$

Setzt man x als gemeinschaftlichen Factor, so ist

$$(an - bd)\, x = bcn$$

und durch Division mit $an - bd$ erhält man

$$x = \frac{bcn}{an - bd}.$$

VI. Die Gleichung

$$x^2 - ab = c$$

giebt durch Uebertragung von $- ab$

$$x^2 = c + ab$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{(c + ab)}.$$

VII. Wäre die Gleichung

$\sqrt{x} + b - a = m$, so entsteht durch Uebertragung von $+ b$ und $- a$

$\sqrt{x} = m - b + a$, und indem man beyde Theile zum Quadrate erhebt,

$x = (m - b + a)^2$ oder durch wirkliche Berechnung dieses neuen Quadrats

$$x = m^2 - 2mb + b^2 + 2(m - b)a + a^2.$$

VIII. Es sey ferner

$5x^2 + \frac{x^2}{2} = a + 4x^2$, so wird durch Multiplication mit 2

$10x^2 + x^2 = 2a + 8x^2$, und, durch Hinübertragen von $+ 8x^2$

$$10x^2 + x^2 - 8x^2 = 2a.$$

Reducirt man den ersten Theil, so ist

$3x^2 = 2a$, folglich durch Division mit 3

$x^2 = \frac{2a}{3}$, und daher durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{\frac{2a}{3}}.$$

§. 63.

Anmerkung. Bey jeder algebraischen Aufgabe kömmt es auf drey Stücke an: auf die schickliche Benennung der in ihr vorkommenden Größen durch Buchstaben; auf die Bildung einer Gleichung, welche den Bedingnissen der Aufgabe vollkommen entspricht und auf die Auflösung dieser Gleichung. Da alles dieses durch wirkliche Beyspiele den Anfängern deutlicher wird, als durch blose Regeln, so scheint es zweckmäßig, nun sogleich zu den Aufgaben zu schreiten.

Vierter Abschnitt.

Arithmetische Aufgaben.

I. Bestimmte Aufgaben mit einem Unbekannten.

§. 64.

I. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die ihrer Hälfte, ihrem Drittheil und Viertheil beygefügt, 148 giebt.

Auflösung. Wenn man die zu findende Zahl x nennt, so ist $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte, $\frac{x}{3}$ ihr dritter und $\frac{x}{4}$ ihr vierter Theil. Folglich ist die Summe aus der Zahl, ihrer Hälfte, ihrem dritten und vierten Theile $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$. Da nun diese Summe 148 betragen soll, so entsteht folgende Gleichung:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 148.$$

Bringt man nun (nach §. 61.) die Divisoren 2, 3 und 4 hinweg, so wird $2x + x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 296$, ferner $6x + 3x + 2x + \frac{6x}{4} = 888$, und $24x + 12x + 8x + 6x = 3552$, folglich, durch Summirung aller x,

$50x = 3552$, und, durch Division mit 50 hat man $x = \frac{3552}{50} = \frac{1776}{25}$.

Probe. Hier ist die gesuchte Zahl $= \frac{1776}{25}$, ihre Hälfte $= \frac{888}{25}$, ihr dritter Theil $= \frac{592}{25}$ und ihr vierter Theil $= \frac{444}{25}$; folglich die Summe von Allem $= \frac{1776}{25} + \frac{888}{25} + \frac{592}{25} + \frac{444}{25} = \frac{3700}{25} = 148$, wie verlangt wurde.

§. 65.

Anmerkung. Nach dem Muster der vorigen Aufgabe können unzählig viele gebildet werden. Die Auflösung derselben ist eine lehrreiche Uebung für die ersten Anfänger. Beyspiele darüber kommen in den Vorlesungen vor.

§. 66.

II. Aufgabe. Die Zahl 600 soll in vier Theile getheilt werden, die eine arithmetische Progression bilden, deren Unterschied 4 ist.

Auflösung. Nennt man den ersten Theil x, so ist der zweyte $x + 4$, der dritte $x + 8$ und der letzte $x + 12$. Da nun nach der Aufgabe diese vier Theile zusammengenommen 600 betragen sollen, so hat man die Gleichung.

$x + x + 4 + x + 8 + x + 12 = 600$. Werden hier sowohl alle x, als die dabey stehenden Zahlen addirt, so ist $4x + 24 = 600$. Durch Uebertragung von 24 erhält man $4x = 600 - 24$, und durch Division mit 4 wird

$$x = \frac{600 - 24}{4} = \frac{576}{4} = 144.$$

Probe. Wenn 144 der erste Theil der Reihe ist, so wird 148 der zweyte, 152 der dritte und 156 der vierte. Wirklich ist auch $144 + 148 + 152 + 156 = 600$.

§. 67.

III. Aufgabe. Man soll die Zahl 968 in 5 Theile theilen, die eine geometrische Progression bilden, deren Exponent 3 ist.

Auflösung. Wenn x der kleinste dieser fünf Theile heißt, so ist $3x$ der folgende, $9x$ der dritte, $27x$ der vierte und $81x$ der letzte. Weil nun sämmtliche fünf Theile zusammengenommen 968 geben sollen, so entsteht die Gleichung

$$x + 3x + 9x + 27x + 81x = 968:$$

addirt man alle x, so ist

$$121x = 968, \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{968}{121} = 8.$$

Probe. Wenn der erste Theil 8 ist, so wird der zweyte 24, der dritte 72, der vierte 216 und der fünfte 648. Auch ist in der That $8 + 24 + 72 + 216 + 648 = 968$.

§. 68.

IV. Aufgabe. Alexander der Große sprach zu seinen Feldherren: Ich bin zwey Jahre älter als Hephästion; Clytus sagte: ich bin vier Jahre älter als ihr beyde, und Kallisthenes setzte hinzu: Mein Vater ist 96 Jahre alt, und so alt, als alle drey. Wie alt war Jeder?

Auflösung. Da es hier darauf ankömmt, das Alter des Hephästions zu finden, so heißt dieses x. Da Alexander zwey Jahre älter ist, so ist dessen Alter $= x + 2$. Das Alter von beyden beträgt also $2x + 2$.

Da nun Clytus vier Jahre älter ist, als beyde, so muß dessen Alter $= 2x + 2 + 4 = 2x + 6$ seyn. Nun ist der Vater des Kallisthenes 96 Jahre alt, und so alt, als alle drey zusammen; folglich entsteht die Gleichung

$$x + x + 2 + 2x + 6 = 96 \text{ oder}$$

$$4x + 8 = 96, \text{ folglich}$$

$$4x = 96 - 8 \text{ und}$$

$$x = \frac{96 - 8}{4}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{88}{4} = 22.$$

Probe. Da Hephästion 22 Jahre alt ist, so muß Alexander $22 + 2$ oder 24 Jahre und Clytus $22 + 24 + 4$ oder 50 Jahre alt seyn. Auch beträgt das Alter von allen drey $22 + 24 + 50$ oder 96 Jahre.

§. 69.

V. **Aufgabe.** Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil die Zahl selbst um 1 übertrifft.

Auflösung. Nennt man die zu findende Zahl x, so ist $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte, $\frac{x}{3}$ ihr dritter Theil, und $\frac{x}{4}$ ihr vierter Theil, und die Gleichung wird folgende:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1, \text{ folglich}$$

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 2x + 2, \text{ daher}$$

$$3x + 2x + \frac{6x}{4} = 6x + 6, \text{ oder}$$

$$12x + 8x + 6x = 24x + 24, \text{ also}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$26x - 24x = 24$$

$$2x = 24.$$

$$x = 12.$$

Probe. Die Hälfte der gefundenen Zahl ist 6, ihr dritter Theil 4, und ihr vierter Theil ist 3. Auch hat man

$$6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1.$$

§. 70.

VI. Aufgabe. Ein Künstler verbindet sich auf 60 Tage unter der Bedingung zu arbeiten, daß ihm an jedem Arbeitstage außer der Kost 45 kr. bezahlt werden sollten; daß er aber an jedem Tage, an welchem er nicht arbeitet, 15 kr. für die Kost geben wollte. Nach Verlauf der 60 Tage bekömmt er 24 fl. Man fragt, wie viele Tage er gearbeitet habe?

Auflösung. Nennt man die Zahl der Arbeitstage x, so ist die Zahl der Feyertage $60 - x$. Drückt man sowohl den Gewinn als Verlust durch Gulden aus, so verdiente der Künstler an sämmtlichen Arbeitstagen $\frac{3}{4} \times x$ oder $\frac{3x}{4}$, und sein Ver-

lust für sämmtliche Feyertage ist $\frac{1}{4} \times (60 - x)$ oder $\frac{60 - x}{4}$. Wird nun das, was der Künstler nach 60 Tagen zahlen mußte, von seinem Verdienste abgezogen, so beträgt dieses, vermöge der Aufgabe 24 fl. Folglich entsteht die Gleichung

$$\frac{3x}{4} - \frac{60 - x}{4} = 24, \text{ oder}$$

$$\frac{3x}{4} - 15 + \frac{x}{4} = 24, \text{ folglich}$$

$$\frac{3x}{4} + \frac{x}{4} - 15 = 24, \text{ oder}$$

$$x - 15 = 24, \text{ folglich}$$

$$x = 24 + 15 = 39.$$

Demnach hat der Künstler 39 Tage gearbeitet und 60 — 39, oder 21 Tage gefeyert.

Probe. Da er an jedem Arbeitstage $\frac{3}{4}$ fl. erhielt, so war die Summe seines Verdienstes $= \frac{3}{4} \times 39 = \frac{117}{4}$ fl.; da er für jeden Feyertag $\frac{1}{4}$ fl. zahlen mußte, so mußte er für 21 Feyertage $\frac{1}{4} \times 21 = \frac{21}{4}$ fl. zahlen. Nun ist $\frac{117}{4} - \frac{21}{4} = \frac{117 - 21}{4} = \frac{96}{4} = 24.$

§. 71.

VII. Aufgabe. Ein Leinwandhändler übernahm zweyerley Gattung Leinwand zu liefern, und er weiß, 1.) die Summe der zu liefernden Stücke; 2.) den Preis jeder Gattung und 3.) den ganzen Geldbetrag. Es ist ihm aber entfallen,

wie viele Stücke von der ersten, und wie viele Stücke von der zweyten Gattung geliefert werden sollten. Dieses soll gefunden werden.

Auflösung. Es sey die Zahl der zu liefernden Stücke ... $= a$, die Zahl der Stücke von der ersten Gattung heiße $= x$, folglich ist die Zahl der Stücke von der andern Art .. .. $= a - x$.

Es sey der Preis eines Stücks der ersten Art ..... $= b$, und jener eines Stücks der zweyten Art .... $= c$, Daher ist der Preis aller Stücke der ersten Art ..... $= bx$ der Preis aller Stücke der zweyten Art aber .... $= ac - cx$ Der Geldertrag für die ganze Bestellung sey ...... $= d$

Aus der Bedingung der Aufgabe entspringt folgende Gleichung:

$$bx + ac - cx = d \text{ also}$$

$$bx - cx = d - ac \text{ oder}$$

$$(b-c)x = d - ac \text{ und endlich}$$

$$x = \frac{d - ac}{b - c}.$$

Da dieser Ausdruck für x ganz allgemein ist, so begreift er eine unzählige Menge einzelner Fälle unter sich.

Beyspiel. Es sey $a = 134$ Stück, $b = 11$ fl., $c = 9$ fl., $d = 1320$ fl., so wird $x = \frac{1320 - 134 \times 9}{11 - 9} = \frac{1320 - 1206}{2} = \frac{114}{2} = 57$. Also sollen 57 Stücke von der ersten, und $134 - 57$, oder 77 Stücke von der zweyten Art geliefert werden.

Probe. Der Geldertrag für die 57 Stücke von der ersten Art ist $= 57 \times 11 = 627$ fl.; und jener der 77 Stücke der andern Art ist $= 77 \times 9 = 693$ fl. Nun ist auch $627 + 693 = 1320$.

§. 72.

VIII. Aufgabe. Ein Kaufmann braucht zur Erhaltung seines Hauswesens jährlich 100 Louisd'or. Wenn er diese zu Anfang jedes Jahrs von der Masse seines Vermögens wegnahm, so ergab sich, daß das Uebrige um ein Drittheil vermehrt war. Nach drey Jahren hatte sich sein Vermögen verdoppelt; es fragt sich: wie groß war das Kapital im Anfange?

Auflösung. 1) Das Kapital, womit der Kaufmann zu handeln anfing, sey $= x$ Louisd'or.

2) Davon zog er zu Anfange des ersten Jahrs 100 Louisd'or für sein Hauswesen ab, und es blieben also $x - 100$.

3) Diesen Rest vermehrte er während des ersten Jahrs mit dem dritten Theil. Mit Ende desselben war also sein Vermögen

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{3x - 300 + x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}.$$

4) Mit Anfang des zweyten Jahrs zieht er wieder 100 Louisd'or davon ab, und es blieb ihm zur Handlung $\frac{4x - 400}{3}$

$$- 100 = \frac{4x - 700}{3}.$$

5) Dieses Vermögen wurde im zweyten Jahre wieder um $\frac{1}{3}$ vermehrt, und war also mit Ende desselben

$$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{12x - 2100 + 4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}.$$

6) Davon gehen zu Anfang des dritten Jahrs wieder 100 Louisd'or ab, und es blieben also

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}.$$

7) Dieser Rest wird während des dritten Jahrs wieder um $\frac{1}{3}$ vermehrt, und giebt also $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$

$$= \frac{48x - 11100 + 16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}.$$

8) Da nun durch diese Veränderungen das Kapital verdoppelt worden ist, so entsteht hieraus die Gleichung

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x \text{ also}$$

$$64x - 14800 = 54x \text{ daher}$$

$$64x - 54x = 14800 \text{ oder}$$

$$10x = 14800 \text{ also}$$

$$x = \frac{14800}{10} = 1480 \text{ Louisd'or.}$$

Probe. Von diesen 1480 gingen zu Anfange des ersten Jahrs 100 ab, und es blieben 1380, diese wurden im ersten Jahre um $\frac{1}{3}$ vermehrt, gaben also zu Ende desselben $1380 + 460 = 1840$. Von diesen wurden zu Anfang des zweyten Jahrs 100 genommen, und es blieben noch 1740, welche in diesem Jahre um $\frac{1}{3}$ oder 580 vermehrt wurden, und am Ende desselben eine Summe von 2320 gaben. Zu Anfang des dritten Jahrs gingen wieder 100 ab, und es blieben noch 2220, welche wieder mit $\frac{1}{3}$ oder 740 vermehrt, am Schlusse des dritten Jahrs eine Summe von $2220 + 740 = 2960$

gaben, welche das Doppelte der anfänglichen Summe 1480 ist.

§. 73.

IX. Aufgabe. Aus den gegebenen Geschwindigkeiten zweyer Körper, die sich gleichförmig *) nach einerley Richtung bewegen, und der Zeit, während welcher der erstere in Bewegung ist, bis der andere geschwindere in Bewegung gesetzt wird; die Zeit zu finden, wann der zweyte den ersten einholen wird.

Auflösung. Die Geschwindigkeit des ersten sey a, jene des zweyten b, die Zeit, um welche die Bewegung des letztern später anfängt, als jene des ersten, sey c, die Zeit von dem Anfange der Bewegung des letztern bis er den ersten erreicht x. Da man den Raum durch ein Product aus der Geschwindigkeit in die Zeit bestimmen kann, so ist der Raum, welchen der erste zurückgelegt hat, bis der letztere in Bewegung kömmt, $= ac$, und der Raum, welchen er noch zurücklegt, bis ihn der andere erreichet, $= ax$. Auch ist der Raum des geschwinderen $= bx$; da nun dieser letzte Raum den beyden erstern gleich seyn muß, so hat man die Gleichung:

$bx = ac + ax$, folglich

$bx - ax = ac$, oder $(b-a)x = ac$, und

$$x = \frac{ac}{b-a}.$$

Beyspiel und Probe. Gesetzt $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, so ist $x = \frac{2 \times 9}{3-2} = 18$. Wenn hier $a = 2$ Schu-

*) Ein Körper bewegt sich gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt.

he, $b = 3$ Schuhe und $c = 9$ Secunden wäre, so hätte man $x = 18$ Secunden. Der zweyte Körper hätte binnen dieser Zeit einen Raum von 18×3 oder von 54 Fuß, und der erstere einen Raum von $2 \times 9 + 2 \times 18 = 18 + 36$ d. h. ebenfalls von 54 Fuß zurückgelegt.

§. 74.

X. Aufgabe. Zwey Boten gehen mit gleichförmiger Bewegung gegeneinander. Man weiß die Entfernung der Orte, von welchen sie ausgehen, die Tagreise eines jeden und die Zeit, um welche der eine früher als der andere abgeht. Man sucht die Zeit ihres Zusammentreffens.

Auflösung. Die Zeit, um welche der erste früher abgeht, als der zweyte, sey $= a$, dessen Tagreise $= b$. Es sey ferner die Tagreise des zweyten $= b + n$ (oder auch $b - n$), die Entfernung der Orte $= d$. Die Zeit von Anfang der Abreise des zweyten bis zur Zusammenkunft heiße x, so ist die Zeit der Reise des ersten $= a + x$ und der von ihm zurückgelegte Raum $= (a + x)\, b = ab + bx$. Eben so ist der zurückgelegte Weg des zweyten $= (b + n)\, x = bx + nx$. Da nun nach der Natur der Sache die Summe beyder Wege der Entfernung beyder Orte gleich seyn muß, so entsteht die Gleichung:

$$ab + bx + bx + nx = d, \text{ oder}$$

$$ab + 2bx + nx = d \text{ folglich}$$

$$2bx + nx = d - ab \text{ oder}$$

$$(2b + n)\, x = d - ab \text{ daher}$$

$$x = \frac{d - ab}{2b + n}$$

Beyspiel und Probe. Es sey $a = 3$, $b = 5$, $n = 1$, $d = 92$, so wird $x = \frac{92 - 3 \times 5}{2 \times 5 + 1} = \frac{92 - 15}{11} = \frac{77}{11} = 7$. Hier ist nun auch

$$3 \times 5 + 2 \times 5 \times 7 + 1 \times 7 = 92.$$

§. 75.

Zusatz. Nimmt man an, daß die zwey Boten zu gleicher Zeit ausgehen, so ist $a = 0$, und die Formel $x = \frac{d - ab}{2b + n}$ wird nun in folgende $x = \frac{d - 0b}{2b + n}$, d. h. in $x = \frac{d}{2b + n}$ verwandelt.

Beyspiel nebst Probe. Behalten die Buchstaben die Werthe des vor. §., so wird $x = \frac{92}{2 \times 5 + 1} = \frac{92}{11} = 8\frac{4}{11}$. Auch ist hier wieder $2bx + nx = d$, oder $10 \times \frac{92}{11} + \frac{92}{11} = 11 \times \frac{92}{11} = 92$.

§. 76.

Zusatz. Nimmt man die Zeit der Zusammenkunft als bekannt an, und will die Tagreise des ersten hieraus finden, so bestimme man in der obigen Gleichung $ab + 2bx + nx = d$, die Größe b durch a, n, d und das nun als bekannt angenommene x. Hierdurch wird

$$ab + 2bx = d - nx \text{ folglich}$$

$$(a + 2x)\, b = d - nx, \text{ und}$$

$$b = \frac{d - nx}{a + 2x}.$$

Beyspiel. Nach der bisherigen Bedeutung der Buchstaben wird $b = \frac{92 - 1 \times 7}{3 + 14} = \frac{85}{17} = 5$, wie oben angenommen wurde.

§. 77.

Zusatz. Sollte man aus allen übrigen Werthen der Gleichung den Unterschied der Tagreisen, oder n finden, so verführe man so:

$$ab + 2bx + nx = d \text{ (§. 76.) also}$$

$$nx = d - ab - 2bx$$

$$n = \frac{d - ab - 2bx}{x}, \text{ oder}$$

$$n = \frac{d - ab}{x} - 2b.$$

Beyspiel Mit Beybehaltung der bekannten Zahlen wird $n = \frac{92 - 3 \times 5}{7} - 2 \times 5$, oder $n = \frac{77}{7} - 10 = 11 - 10 = 1$, wie oben.

§. 78.

Zusatz. Desgleichen könnte man a, oder die Zeit finden, um welche der erste vor dem zweyten in Bewegung kam. Denn aus

$$ab + 2bx + nx = d, \text{ folgt}$$

$$ab = d - 2bx - nx \text{ also}$$

$$a = \frac{d - 2bx - nx}{b} \text{ oder}$$

$$a = \frac{d - nx}{b} - 2x$$

Beyspiel. Hier ist:

$$a = \frac{9^2 - 1 \times 7}{5} - 2 \times 7 \text{ folglich}$$

$$a = \frac{85}{5} - 14 = 17 - 14 = 3, \text{ wie oben.}$$

§. 79.

XI. Aufgabe. *A*, *B*, und *C* werden zu Erben eines Vermögens von 12000 fl. mit der Bedingniß eingesetzt, daß *A* zur Hälfte, *B* zum Drittheil und *C* zum Viertheil erben solle. Wie viel bekömmt Jeder?

Auflösung. Da $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{26}{24} = 1\frac{1}{12}$ ist, so betragen die bestimmten Theile um $\frac{1}{12}$ mehr als das Ganze, und die Theilung kann nicht buchstäblich vollzogen werden. Es bleibt daher nichts übrig, als daß sich *A*, B und *C* nach dem Verhältniß von $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ in die Erbschaft theilen. Es kommt also hier darauf an, eine Zahl zu finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil zusammengenommen 12000 fl. beträgt. Dies giebt folgende Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12000, \text{ folglich}$$

$$\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = 12000, \text{ also}$$

$$\frac{26x}{24} = 12000, \text{ und}$$

$$26x = 24 \times 12000 \text{ daher}$$

$$x = \frac{24 \times 12000}{26} \text{ oder}$$

$$x = \frac{12 \times 12000}{13} = \frac{144000}{13} = 11076\tfrac{12}{13}.$$

Giebt man von dieser Zahl dem *A* die Hälfte, dem *B* ein Drittheil und dem *C* ein Viertheil, so muß ihre Summe 12000 betragen. Es ist nun $(11076\tfrac{12}{13}) : 2 = 5538\tfrac{6}{13}$; $(11076\tfrac{12}{13}) : 3 = 3692\tfrac{4}{13}$ und $(11076\tfrac{12}{13}) : 4 = 2769\tfrac{3}{13}$ und $5538\tfrac{6}{13} + 3692\tfrac{4}{13} + 2769\tfrac{3}{13} = 12000$.

§. 80.

XII. Aufgabe. Eine Frau bringt Garn zum Weber und verlangt 100 Ellen Tuch davon. Der Weber sagt, es seyen 5 Pfund zu wenig; aber für 80 Ellen seyen es 3 Pfund zu viel. Wie viel Pfunde Garn sind es gewesen, und wie viele Ellen gab ein Pfund?

Auflösung. Wenn man die zu findende Zahl der Pfunde Garn x nennt, so brauchte man zu 100 Ellen Tuch $x + 5$, und folglich zu einer Elle $\frac{x + 5}{100}$ Pfunde. Ferner brauchte man zu 80 Ellen $x - 3$, daher zu einer Elle $\frac{x - 3}{80}$ Pfunde. Es entsteht folglich die Gleichung:

$$\frac{x + 5}{100} = \frac{x - 3}{80}$$

$$x + 5 = \frac{100x - 300}{80}$$

$$80x + 400 = 100x - 300$$

$$400 + 300 = 100x - 80x$$

$$700 = 20x$$

$$\frac{700}{20} = x = 35.$$

Probe. Da es 35 Pfunde waren, so geben 35 + 5, oder 40 Pfunde 100 Ellen, so wie 35 — 3, oder 32 Pfunde 80 Ellen geben. Im ersten Falle giebt 1 Pfund $\frac{100}{4} = 2\frac{1}{2}$ Ellen und im letzten giebt 1 Pfund $\frac{80}{32}$ also ebenfalls $2\frac{1}{2}$ Ellen.

§. 81.

Anmerkung. Die bisher betrachteten Aufgaben haben nur eine unbekannte Größe enthalten. Oefters erfodert es die Natur der aufzulösenden Aufgabe, zwey, drey oder mehrere Unbekannte anzunehmen. Soll aber in diesen Fällen jedes derselben nur einen bestimmten Werth erhalten, so muß man aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen bilden können, als Unbekannte in derselben vorkommen. Kann dieses nicht geschehen, so haben die Unbekannten mehr als einen Werth. Beyspiele werden die Richtigkeit dieser Regeln deutlicher zeigen, als es hier mit blosen Worten geschehen kann.

II. Bestimmte Aufgaben mit zwey und drey Unbekannten.

§. 82.

1. Aufgabe. Aus der bekannten Summe zweyer Zahlen und ihrem Unterschiede die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Wenn man die größere Zahl x, die kleinere y, ihre Summe s und ihren Unterschied d heißt, so entstehen aus der Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$x + y = s$ (A) und
$x - y = d$ (B).

Bestimmt man in beyden den Werth des **einen** Unbekannten z. B. von x, so wird aus (A)

$$x = s - y, \text{ und aus (B)}$$

$$x = d + y, \text{ folglich ist auch}$$

$$s - y = d + y$$

$$s - d = y + y = 2y$$

$$\frac{s - d}{2} = y \text{ (C)} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

Um nun auch x zu finden, setze man den hier gefundenen Werth von y in eine der vorigen Gleichungen, z. B. in (A), so wird $x = s - \left(\frac{s - d}{2}\right)$

$$x = s - \frac{s + d}{2}$$

$$x = \frac{2s - s + d}{2}$$

$$x = \frac{s + d}{2} \text{ (D)} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

Beyspiel. Es sey $s = 40$, $d = 16$, so ist nach (C)

$$\frac{40 - 16}{2} = y \text{ oder}$$

$$\frac{24}{2} = 12 = y$$

Und nach (D) wird

$$\frac{40 + 16}{2} = x, \text{ oder}$$

$$\frac{56}{2} = 28 = x$$

Probe. Wirklich ist hier 28 + 12 = 40 und 28 — 12 = 16.

§. 83.

Zusatz. Durch vorige Aufgabe ist zugleich folgender allgemeine Lehrsatz bewiesen worden, dessen Richtigkeit aus den Gleichungen (C) und (D) erhellet. Er heißt: Wenn man den halben Unterschied zweyer Größen von ihrer halben Summe abzieht, so erhält man die kleinere; wenn man aber ihren halben Unterschied zur halben Summe addirt, so erhält man die größere von ihnen.

§. 84.

Anmerkung. I. In den Gleichungen (A) und (B) des §. 82. wurde zuerst der Werth von x bestimmt. Daß man auch den Anfang mit Bestimmung von y machen könne, soll in den Vorlesungen gezeigt werden; so wie auch, daß es einerley ist, in welche der beyden ersten Gleichungen für x und y man den bekannten Werth des einen einsetzen könne, um den andern zu finden.

§. 85.

Anmerkung. II. Obgleich das in dem vorhergehenden angegebene Verfahren, den Werth von x und y zu bestimmen, ganz allgemein ist, so giebt es sowohl hier, als in andern ähnlichen Fällen bisweilen kürzere Mittel dazu. Denn wenn man die beyden Hauptgleichungen (A) und (B) (in §. 82.) zusammen addirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x + y = s \\ x - y = d \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$2x = s + d \text{ folglich}$$

$$x = \frac{s + d}{2}, \text{ wie oben.}$$

Werden sie aber von einander subtrahirt, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} x + y = s \\ x - y = d \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$2y = s - d \text{ daher}$$

$$y = \frac{s - d}{2}, \text{ wie oben.}$$

§. 86.

II. Aufgabe. Es hat jemand zwey Becher nebst einem Deckel, der 18 fl. werth ist. Wird dieser auf den ersten Becher gesetzt, so ist er noch einmal so viel werth, als der zweyte; wird er aber auf den zweyten gesetzt, so ist dieser um ein Viertel mehr werth als der erste. Wie viel ist jeder werth?

Auflösung. Der Werth des ersten sey x, des zweyten y. Setzt man den Deckel auf den ersten, so ist sein Werth $= x + 18$, und da dieser nun noch einmal so groß seyn soll, als der Werth des andern Bechers, so hat man die Gleichung

$$x + 18 = 2y \text{ (A).}$$

Setzt man den Deckel auf den zweyten Becher, so ist sein Werth $y + 18$, und da der zweyte dann um $\frac{1}{4}$ mehr werth seyn soll, als der erste, so ist die zweyte Gleichung

$$y + 18 = x + \frac{x}{4} \text{ (B)}$$

Bestimmt man nun sowohl in (A) als in (B) den Werth eines Unbekannten, z. B. von x, so wird aus (A)

$$x = 2y - 18 \text{ (C).}$$

Und aus (B) entsteht

$$4y + 72 = 4x + x = 5x$$

$$\frac{4y + 72}{5} = x \text{ (D).}$$

Setzt man die zwey Werthe für x in (C) und (D) gleich, so wird $2y - 18 = \frac{4y + 72}{5}$

$$10y - 90 = 4y + 72$$

$$10y - 4y = 90 + 72$$

$$6y = 162$$

$$y = 27.$$

Setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (C), so wird $x = 2 \times 27 - 18$ folglich

$$x = 54 - 18 = 36.$$

Probe. Werden diese Zahlenwerthe in die Gleichungen (A) und (B) gesetzt, so findet man

I. $36 + 18 = 2 \times 27$, und

II. $27 + 18 = 36 + \frac{36}{4}$, daher sind die Foderungen der Aufgabe erfüllt.

§. 87.

Anmerkung I. Auch hier hätte man in den beyden Hauptgleichungen (A) und (B §. 86.) zuerst beyderseits y bestimmen, und dann den aus der neuen Verbindungsglei-

chung erhaltenen Werth von x in jede der ersten Gleichungen einsetzen können. Diese Uebung ist lehrreich für Anfänger.

§. 88.

Anmerkung II. Um die vorhergehende Aufgabe ganz allgemein aufzulösen, wo sie sich auf sehr viele andere Fälle anwenden läßt, setze man den Werth des Deckels $= a$, und das, was vorhin $\frac{1}{4}$ war, sey nun $\frac{1}{n}$. Jetzt wird die Gleichung (A) in folgende verwandelt,

$x + a = 2y$ (α) und aus (B) wird nunmehr

$$y + a = x + \frac{x}{n} \quad (\beta)$$

Bestimmt man in beyden den Werth von y, so wird aus (α) $\frac{x + a}{2} = y$ (γ) und aus (β) erhält man

$$y = x + \frac{x}{n} - a \quad (\delta)$$

Diese Werthe von y gleichgesetzt, giebt

$$\frac{x + a}{2} = x + \frac{x}{n} - a$$

$$x + a = 2x + \frac{2x}{n} - 2a$$

$$nx + an = 2nx + 2x - 2an$$

$$2an + an = 2nx - nx + 2x$$

$$3an = nx + 2x$$

$$3an = (n + 2)\,x$$

$$\frac{3an}{n + 2} = x$$

Um nun auch einen Ausdruck für y zu finden, setze man den Werth von x in die Gleichung (γ), so erhält man aus

$$\frac{x}{2} + \frac{a}{2} = y, \text{ nunmehr}$$

$$\frac{3an}{2n + 4} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{6an + 2an + 4a}{4n + 8} = y$$

$$\frac{8an + 4a}{4n + 8} = y$$

$$\frac{2an + a}{n + 2} = y$$

Von der Anwendung dieser Aufgabe auf andere Fälle in den Vorlesungen.

§. 89.

III. Aufgabe. A will seinem Nachbar B zwey Morgen Land abkaufen. B erwiedert, alsdann würde A noch einmal so viele Morgen haben, als er. Wollte ihm aber A zwey Morgen von den seinigen verkaufen, so hätten sie beyde gleichviel. Wie viele Morgen hatte Jeder?

Auflösung. Die Anzahl der Morgen des A heiße x, jene des B sey y. Aus der ersten Bedingung der Aufgabe entsteht die Gleichung

$$x + 2 = 2(y - 2) \text{ (A).}$$

und aus der zweyten wird

$$x - 2 = y + 2. \text{ (B)}$$

Bestimmt man in jeder Gleichung den Werth irgend eines Unbekannten, z. B. von y, so wird aus (A)

$$x + 2 = 2y - 4$$

$$x + 2 + 4 = 2y$$

$$\frac{x + 6}{2} = y \text{ (C)}$$

Aus (B) erhält man

$$x - 2 - 2 = y \text{ oder}$$

$$x - 4 = y \text{ (D)}$$

Beyde Werthe in (C) und (D) gleichgesetzt, giebt

$$\frac{x + 6}{2} = x - 4$$

$$x + 6 = 2x - 8$$

$$8 + 6 = 2x - x = x$$

$$14 = x$$

Substituirt man diesen Zahlenwerth in (D), so wird

$$14 - 4 = 10 = y.$$

Probe. Da der *A* 14 Morgen und der *B* 10 Morgen hatte, so ist

I.) $14 + 2 = 2\,(10 - 2) = 16$, und
II.) $14 - 2 = 10 + 2 = 12$.

§. 90.

IV. Aufgabe. Man soll drey Zahlen finden, von welchen die erste, nebst der Hälfte der zwey andern $= A$, die

zweyte, nebst dem dritten Theil der zwey andern $= B$, und die dritte, nebst dem vierten Theil der andern $= C$ ist.

Auflösung. Nennt man die drey zu findenden Zahlen x, y und z, so giebt die Aufgabe folgende drey Hauptgleichungen:

$$x + \frac{y + z}{2} = A \text{ (I)}$$

$$y + \frac{x + z}{3} = B \text{ (II), und}$$

$$z + \frac{x + y}{4} = C \text{ (III).}$$

Bestimmt man in jeder derselben den Werth eines beliebigen Unbekannten; z. B. den Werth von z, so erhält man durch eine leichte Rechnung

$$z = 2A - 2x - y \text{ (IV)}$$

$$z = 3B - 3y - x \text{ (V) und}$$

$$z = \frac{4C - x - y}{4} \text{ (VI)}$$

Setzt man die Werthe in (IV) und (V) und jene in (IV) und (VI) einander gleich, so wird

$$2A - 2x - y = 3B - 3y - x \text{ (VII) und}$$

$$2A - 2x - y = \frac{4C - x - y}{4} \text{ (VIII).}$$

Da diese beyde Gleichungen nur zwey unbekannte Größen enthalten, so bestimme man in jeder irgend eine davon. Für y ergeben sich, nach vollbrachter Rechnung, folgende Werthe

$$y = \frac{3B - 2A + x}{2} \text{ (IX) und}$$

$$y = \frac{8A - 7x - 4C}{3} \text{ (X)}$$

Bringt man nun auch diese zwey Ausdrücke für y (IX und X) in eine Gleichung, so wird

$$\frac{3B - 2A + x}{2} = \frac{8A - 7x - 4C}{3} \quad \text{(XI)}$$

Da diese letzte Gleichung nur ein Unbekanntes enthält, so läßt sich der Werth von x leicht bestimmen. Nach gehöriger Rechnung erhält man

$$x = \frac{22A - 8C - 9B}{17} \quad \text{(XII)}$$

Substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung (IX), so ergiebt sich

$$y = \frac{21B - 6A - 4C}{17} \quad \text{(XIII)}$$

Werden endlich beyde Werthe von x und y in die Gleichung (IV) gebracht, so findet man

$$z = \frac{20C - 3B - 4A}{17} \quad \text{(XIV)}$$

Folglich sind die drey Unbekannte x, y und z in bekannten Zahlen bestimmt.

Allgemeine Probe. Diese wird gemacht, wenn man die hier gefundenen Werthe von x, y und z in die Gleichungen (I), (II) und (III) setzt. Nach I ist

$$\frac{22A - 8C - 9B}{17} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{21B - 6A - 4C}{17} + \frac{20C - 3B - 4A}{17}\right) = \frac{22A - 8C - 9B}{17} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{18B - 10A + 16C}{17}\right) = \frac{22A - 8C - 9B}{17} + \frac{9B - 5A + 8C}{17} = \frac{17A}{17} = A.$$

Auf gleiche Weise kann auch die Probe für die Gleichungen (II) und (III) gemacht werden.

Beyspiel. Setzt man $A = 4$, $B = 3$ und $C = 2$, so wird

$$x = \frac{22 \times 4 - 8 \times 2 - 9 \times 3}{17} = \frac{45}{17},$$

$$y = \frac{21 \times 3 - 6 \times 4 - 4 \times 2}{17} = \frac{31}{17}, \text{ und}$$

$$z = \frac{20 \times 2 - 3 \times 3 - 4 \times 4}{17} = \frac{15}{17}$$

Probe. Hier wird

$$1)\ \frac{45}{17} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{31}{17} + \frac{15}{17}\right) = 4,$$

$$2)\ \frac{31}{17} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{45}{17} + \frac{15}{17}\right) = 3, \text{ und}$$

$$3)\ \frac{15}{17} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{45}{17} + \frac{31}{17}\right) = 2.$$

§. 91.

Allgemeiner Zusatz. Aus der bisherigen Theorie und Praxis der algebraischen Aufgaben ergiebt sich die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes: Wenn man aus den Bedingungen einer Aufgabe so viele besondere Gleichungen bilden kann, als unbekannte Größen in ihr vorkommen, so erhält jedes dieser Unbekannten nur einen bestimmten Werth, und die Aufgabe ist eine bestimmte. Da nun öfters auch Fälle vorkommen, wo man eine Gleichung weniger hat, als die Zahl der unbekannten Größen beträgt, so sollen die

allgemeinsten Regeln zur Auflösung dieser Aufgaben nun in mehreren Beyspielen angeführt werden. Dies giebt die Lehre von den unbestimmten Aufgaben.

III. Unbestimmte Aufgaben.

§. 92.

I. Aufgabe. Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe $= 8$ ist.

Auflösung. Nennt man die zu findenden Zahlen x und y, so läßt sich nur folgende Gleichung bilden:

$$x + y = 8, \text{ woraus}$$

$$x = 8 - y \text{ folget.}$$

Da nun x hier durch die Zahl 8 und die unbekannte Größe y bestimmt ist, so sieht man, daß x verschiedene Werthe haben wird, je nachdem man für y verschiedene setzt. Giebt man aber diesem y verschiedene willkührliche Werthe, so wird auch x mehrere Werthe erhalten. Wenn man voraussetzt, daß x eine ganze und positive Größe seyn soll, so sind die für y zu setzendem willkührlichen Werthe bestimmt. Nämlich:

für $y = 1$ oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6, oder 7,
wird $x = 7$ — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1.

Dürfte hingegen x eine gebrochene Zahl, oder eine negative seyn, so könnte man für x unzählig viele Werthe erhalten.

§. 93.

II. Aufgabe. Es sollen 360 Morgen Feld in 22 Grundstücke getheilt werden, welche theils 24 Morgen, theils 12 und zum Theil 6 Morgen enthalten.

Auflösung. Die Zahl der Stücke von 24 Morgen sey x, jene der Stücke von 12 Morgen y und jene von 6 Morgen z, so entsteht zuerst folgende Gleichung

$$x + y + z = 22. \text{ (A)}$$

Da nun $24x$, $12y$ und $6z$ die Zahl der Morgen bedeuten, welche in allen 24, 12 und 6 Morgenstücken enthalten sind, so hat man eine zweyte Gleichung

$$24x + 12y + 6z = 360 \text{ (B)}.$$

Mit diesen zwey Gleichungen sind die sämmtlichen Bedingnisse der Aufgabe erschöpft. Es lassen sich daher für die drey Unbekannte keine drey bestimmte Werthe finden. Bestimmt man nun in jeder der obigen Hauptgleichungen den Werth eines Unbekannten z. B. von x, so wird aus (A)

$$x = 22 - y - z \text{ (C)}.$$

und aus (B) ist

$$x = \frac{360 - 12y - 6z}{24} \text{ oder}$$

$$x = \frac{60 - 2y - z}{4} \text{ (D)}$$

Die Werthe in (C) und (D) gleichgesetzt giebt

$$22 - y - z = \frac{60 - 2y - z}{4} \text{ (E)}$$

Bestimmt man hier y, so erhält man

$$88 - 4y - 4z = 60 - 2y - z$$

$$88 - 60 - 4z + z = 4y - 2y$$

$$28 - 3z = 2y$$

$$\frac{28 - 3z}{2} = y$$

$$14 - \frac{3z}{2} = y \text{ (F)}$$

Setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (C), so ergiebt sich

$$x = 22 - \left(14 - \frac{3z}{2}\right) - z$$

$$x = 22 - 14 + \frac{3z}{2} - z$$

$$2x = 44 - 28 + 3z - 2z$$

$$2x = 16 + z$$

$$x = 8 + \frac{z}{2} \quad (G)$$

Sollen nun die Werthe für x, y und z ganze und positive Zahlen seyn, wie es die Bedingnisse obiger Aufgabe voraussetzen, so wird sich aus den Gleichungen (F) und (G) bestimmen lassen, was man für z setzen könne, damit x und y dieser Foderung entsprechen. Aus (F) ergiebt es sich, daß man höchstens z = 8 nehmen dürfte. Hierdurch wird $\frac{3z}{2} = 12$ und y = 2. Die möglichen Werthe für z und die dadurch bestimmten Werthe für y und x sind also folgende:

für z = 8 wird y = 2 und x = 12,
— z = 6 — y = 5 — x = 11,
— z = 4 — y = 8 — x = 10,
— z = 2 — y = 11 — x = 9.

Probe. Diese besteht darin, daß jedesmal

$x + y + z = 22$, und
$24x + 12y + 6z = 360$ seyn muß.

§. 94.

Anmerkung. In der vorigen Auflösung wurde zuerst die unbekannte Größe x bestimmt. Dies war eben nicht nothwendig, sondern man könnte auch mit y oder z den Anfang machen und würde am Ende die nämlichen Werthe erhalten haben. Es ist sehr zu rathen, diese Uebung mit den Anfängern vorzunehmen, damit sie eine deutlichere Einsicht in die Natur der algebraischen Auflösungen erlangen. Ausser diesem einen Hauptfalle lassen sich noch mehrere besondere Fälle denken, wobey Abwechslungen vorkommen, welche in den Vorlesungen erläutert werden.

§. 95.

III. Aufgabe. Dreyßig Personen, worunter sich Männer, Weiber und Kinder befinden, verzehren zusammen 50 fl. Jeder Mann zahlte 3 fl., jede Frau 2 fl., jedes Kind 1 fl. Wie viele Männer, Weiber und Kinder waren es?

Auflösung. Nennt man die Anzahl der Männer x, jene der Weiber y und der Kinder z, so giebt die Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$x + y + z = 30 \text{ (A) und}$$
$$3x + 2y + z = 50 \text{ (B)}.$$

Bestimmt man aus (A) und (B) den Werth von z, so ergiebt sich aus jener

$$z = 30 - x - y \text{ (C), aus dieser}$$
$$z = 50 - 3x - 2y \text{ (D)}$$

Werden beyde Werthe von z gleichgesetzt, so ist:

$$30 - x - y = 50 - 3x - 2y \text{ (E)}$$

Bestimmt man hier das Unbekannte y, so ist die Gleichung diese:

$$\frac{2y - y = 50 - 30 - 3x + x}{y = 20 - 2x \ (F)}$$

Soll nun y eine ganze und positive Zahl seyn, wie dies in obiger Aufgabe der Fall seyn muß, so folget aus (F), daß x nicht $>$ 10 seyn darf. Da es nun auch nicht $<$ 1 seyn kann, so ergeben sich folgende Fälle:

Für	$x = 1$	wird	$y = 18$	und	$z = 11$
—	$x = 2$	—	$y = 16$	—	$z = 12$
—	$x = 3$	—	$y = 14$	—	$z = 13$
—	$x = 4$	—	$y = 12$	—	$z = 14$
—	$x = 5$	—	$y = 10$	—	$z = 15$
—	$x = 6$	—	$y = 8$	—	$z = 16$
—	$x = 7$	—	$y = 6$	—	$z = 17$
—	$x = 8$	—	$y = 4$	—	$z = 18$
—	$x = 9$	—	$y = 2$	—	$z = 19$.

Probe. Diese besteht darin, daß für alle Werthe der gefundenen Größen

I.) $x + y + z = 30$ und

II.) $3x + 2y + z = 50$ ist.

§. 96.

Anmerkung. Die Uebung des §. 94. kann auch hier sehr zweckmäßig angebracht werden.

§. 97.

IV. Aufgabe. Von vier Weinsorten, wovon die Maaß 4 fl., 2 fl., 1 fl. und $\frac{1}{2}$ fl. kostet, sollen 20 Maaß für 20 fl. gekauft werden. Auf wie vielerley Art ist dies möglich?

Auflösung. Nennt man die Zahl der Maaße der 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Sorte w, x, y und z, so giebt die Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$4w + 2x + y + \tfrac{1}{2} z = 20 \quad (A)$$
$$w + x + y + z = 20 \quad (B)$$

Wird die zweyte von der ersten abgezogen, so erhält man

$$3w + x - \tfrac{1}{2} z = 0 \quad (C) \text{ woraus}$$

$$3w + x = \frac{z}{2}$$

$$6w + 2x = z \quad (D)$$

Nun wird aus (A)

$y = 20 - 4w - 2x - \frac{1}{2} z$, oder, durch Substitution des in (D) gefundenen Werthes von z,

$$y = 20 - 4w - 2x - 3w - x$$

$$y = 20 - 7w - 3x$$

$$y = 20 - (7w + 3x) \quad (E)$$

Wenn nun, wie vorausgesetzt wird, y eine ganze und positive Zahl seyn soll, so folget aus (E) daß $7w + 3x < 20$ genommen werde. Nimmt man daher für w und x die kleinsten Zahlenwerthe, die möglich sind, und bestimmt hiernach das unbekannte y in (E) und z in (D), so erhält man folgende mögliche Fälle:

Für	$w = 1$	und	$x = 1$	wird	$y = 10$	und	$z = 8$
—	$w = 1$	—	$x = 2$	—	$y = 7$	—	$z = 10$
—	$w = 1$	—	$x = 3$	—	$y = 4$	—	$z = 12$
—	$w = 1$	—	$x = 4$	—	$y = 1$	—	$z = 14$
—	$w = 2$	—	$x = 1$	—	$y = 3$	—	$z = 14$
—	$w = 2$	—	$x = 2$	—	$y = 0$	—	$z = 16$

dieser letzte Fall kann nicht Statt finden, weil er die Anzahl der Maaße zu 1 fl. ausschließet.

Probe. Diese ist in den beyden Gleichungen (A) und (B) enthalten und kann für jeden der obigen fünf Fälle leicht nachgerechnet werden.

§. 98.

V. Aufgabe. Drey Krämer verkaufen Tuch; *A* 27 Ellen, *B* 34 Ellen und *C* 41 Ellen. Keiner verkauft die Elle theurer, als der andere, und als alle ihr Tuch verkauft hatten, traf sich's, daß jeder gerade so viel eingenommen hatte, als der Andere.

Auflösung. 1) Der Fall ist unmöglich, wenn man nicht annimmt, daß sie mehrmals an dem Tuche verkauft haben, und zwar das erstemal z. B. theurer, als das zweytemal.

2) Es sey daher der Preis einer Elle am ersten Tage $= m$, am zweyten Tage $= n$. Ferner habe *A* für m verkauft x Ellen, so hat er das anderemal für n verkauft $27 - x$ Ellen und sein eingenommenes Geld ist $= mx + 27n - nx = (m - n) x + 27n$.

3) *B* habe für m verkauft y Ellen, so hat er für n verkauft $34 - y$ Ellen und seine sämmtliche Einnahme ist $= my + 34n - ny = (m - n) y + 34n$.

4) *C* habe für m verkauft z Ellen, so hat er für n verkauft $41 - z$ Ellen und der ganze Ertrag dafür ist $= mz + 41n - nz = (m - n) z + 41n$.

5) Da nun der Erlöß in allen drey Fällen der nämliche war, so hat man (aus 2 und 3)

$$(m - n)\,x + 27n = (m - n)\,y + 34n$$

$$(m - n)\,x = (m - n)\,y + 7n.$$

$$x = y + \frac{7n}{m - n} \quad (A)$$

desgleichen wird (aus 3 und 4)

$$(m - n)\,y + 34n = (m - n)\,z + 41n$$

$$(m - n)\,y = (m - n)\,z + 7n$$

$$y = z + \frac{7n}{m - n} \quad (B)$$

6) In den Gleichungen (A) und (B) müßen für m und n beliebige Werthe gesetzt werden, welche aber, wenn man zum Resultate keine Brüche haben will, so gewählt werden müßen, daß $m - n$ in $7n$ ohne Rest aufgehe, oder daß $\frac{n}{m - n}$ eine ganze Zahl sey.

7) Nimmt man z. B. $m = 2$, $n = 1$, so wird

$$\frac{n}{m - n} = 1, \text{ folglich } \frac{7n}{m - n} = 7.$$

8) Da nun der kleinste Werth, welchen z haben kann, $= 1$ ist, so ist aus (B) der kleinste Werth für $y = 1 + 7 = 8$ und der kleinste Werth für x aus (A) $= 8 + 7 = 15$.

9) Fährt man fort $z = 2$; $z = 3$; $z = 4$ u. s. f. zu setzen, so werden für y und x die größten Werthe gefunden, wenn $z = 13$ ist, denn nun wird $y = 13 + 7 = 20$, und $x = 20 + 7 = 27$. Wollte man $z = 14$ nehmen, so würde $y = 14 + 7 = 21$ und $x = 21 + 7 = 28$. Da nun der Krämer *A* nur 27 Ellen Tuch hat, so ist dieser letzte Fall unmöglich.

10) Die Zahl der möglichen Fälle wird folglich (für die Annahme $m = 2$, $n = 1$) auf folgende dreizehn beschränkt:

für $z = 1$ wird $y =$	8, und $x =$	15
„ 2 ———	9 ———	16
„ 3 ———	10 ———	17
„ 4 ———	11 ———	18
„ 5 ———	12 ———	19
„ 6 ———	13 ———	20
„ 7 ———	14 ———	21
„ 8 ———	15 ———	22
„ 9 ———	16 ———	23
„ 10 ———	17 ———	24
„ 11 ———	18 ———	25
„ 12 ———	19 ———	26
„ 13 ———	20 ———	27.

11) Die Probe ist leicht anzustellen. Für den ersten Fall verkauft

A	zuerst	15 Ellen für 2 fl.	= 30 fl.
	hernach	12 Ellen für 1 fl.	= 12 fl.
		27 Ellen für ———	42 fl.
B	zuerst	8 Ellen für 2 fl.	= 16 fl.
	hernach	26 Ellen für 1 fl.	= 26 fl.
		34 Ellen für ———	42 fl.
C	zuerst	1 Elle für 2 fl.	= 2 fl.
	hernach	40 Ellen für 1 fl.	= 40 fl.
		41 Ellen für ———	42 fl.

12) Wenn man für m und n andere Zahlen setzt, so erhält man für beliebige z, wieder andere Werthe von y und x.

§. 99.

Anmerkung. So viel von den niedern Gleichungen. Von den höhern betrachten wir nur die quadratischen, welche (nach §. 56.) theils reine, theils unreine oder vermischte sind. Von beyden soll nun kürzlich gehandelt werden.

IV. Quadratische Gleichungen.

§. 100.

Aufgabe. Die Gründe zur Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen zu entwickeln.

Auflösung. 1) Aus dem Begriffe dieser Gleichungen folget, daß ihre allgemeine Form diese ist $x^2 = a$, woraus denn $x = \sqrt{a}$ wird. Da nun sowohl $+ a \times + a$, als auch $- a \times - a$ zum Producte $+ a^2$ giebt (§. 21), so hat x einen doppelten Werth; nämlich $x = + \sqrt{a}$ und $x = - \sqrt{a}$, welches man auch so schreibt $x = \pm \sqrt{a}$.

2) Wäre z. B. $nx^2 = m$, so hätte man $x^2 = \frac{m}{n}$ und $x = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}$. Dieser Werth von x kann entweder rational seyn oder irrational, jenachdem $\frac{m}{n}$ ein vollkommenes Quadrat ist, oder nicht. Wäre aber $\frac{m}{n}$ eine negative Größe und folglich $x = \pm \sqrt{- \frac{m}{n}}$, so nennt man x eine unmögliche, imaginäre oder eingebildete Größe, weil ein negatives Quadrat ein Unding ist.

3) Wenn alle Glieder der Gleichung entweder x^2 oder x enthalten, so dividire man sie alle mit x, und man erhält eine einfache Gleichung.

Z. B. $ax^2 + x = bx^2 + cx$

$$ax + 1 = bx + c$$

$$ax - bx = c - 1$$

$$(a - b)\, x = c - 1$$

$$x = \frac{c - 1}{a - b}.$$

4) Wenn zwey unbekannte Größen auf der zweyten Potenz stehen und auch zwey Gleichungen erhalten werden, so hat jedes der Unbekannten nur einen bestimmten Werth. Z. B.

Es sey $x^2 = a - 2y^2$ (A) und
$x^2 + y^2 = b$ (B).

Aus (B) wird sogleich $x^2 = b - y^2$ (C), folglich (A) und (C) gleichgesetzt,

$$a - 2y^2 = b - y^2$$

$$a - b = 2y^2 - y^2$$

$$a - b = y^2 \text{ (D)}$$

$$\pm \sqrt{(a - b)} = y$$

Wird der Werth von y^2 in (D) in die Gleichung (C) gesetzt, so erhält man

$$x^2 = b - (a - b)$$

$$x^2 = 2b - a$$

$$x = \pm \sqrt{(2b - a)}\ .$$

§. 101.

Aufgabe. Aus der bekannten Summe und dem Producte zweyer Zahlen diese Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Es sey die Summe $= s$, das Product $= p$. Nennt man ihre Differenz d, so ist (nach §. 83.) die größere Zahl $= \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$, die kleinere $= \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$.

Daher ist ihr Product

$$\left(\frac{s}{2} + \frac{d}{2}\right) \times \left(\frac{s}{2} - \frac{d}{2}\right) =$$

$$\frac{s^2}{4} - \frac{d^2}{4} = p$$

$$s^2 - d^2 = 4p$$

$$s^2 - 4p = d^2$$

$$d = \sqrt{(s^2 - 4p)}$$

Hierdurch ist d gegeben, folglich auch die größere nebst der kleineren Zahl.

Beyspiel. Es sey $s = 14$, $p = 45$, so wird $d = \sqrt{(14 \times 14 - 4 \times 45)} = \sqrt{(196 - 180)} = \sqrt{16} = 4$. Folglich ist $\frac{d}{2} = 2$ und die größere Zahl

$= 7 - 2 = 9$; die kleinere $= 7 - 2 = 5$. Wirklich ist auch $5 + 9 = 14$ und $5 \times 9 = 45$.

§. 102.

II. Aufgabe. Ein quadratisches Feldstück soll mit parallelen Baumreihen besetzt werden, die gleiche Entfernung haben. Setzt man in jede Reihe x Bäume nach Länge und Breite, so bleiben noch 284 übrig; setzt man dagegen nach Länge und Breite $x + 1$ Bäume, so hat man 25 zu wenig. Wie viel beträgt der Vorrath aller Bäume?

Auflösung. 1) Werden x Bäume nach Länge und Breite gepflanzt, so hält das Grundstück x^2 Bäume und der Vorrath ist, weil nun noch 284 übrig bleiben, $= x^2 + 284$.

Pflanzt man $x + 1$ nach Länge und Breite, so kommen auf das Feld $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ Bäume, und der Vorrath ist nun, da 25 Stücke fehlen, $= x^2 + 2x + 1 - 25 = x^2 + 2x - 24$.

3) Aus 1 und 2 entsteht also die Gleichung:

$$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24.$$

$$284 + 24 = x^2 - x^2 + 2x$$

$$308 = 2x$$

$$154 = x.$$

Probe. $154 \times 154 = 23716$. Addirt man die 284 dazu, so ist die Summe 24000 der Vorrath sämmtlicher Bäume. Eben so ist $155 \times 155 = 24025$, wovon die 25 abgezogen, ebenfalls 24000 übrig lassen.

§. 103.

III. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt, 24 giebt.

Auflösung. Heißt diese zu findende Zahl x, so ist

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 24$$

$$\frac{x^2}{6} = 24$$

$$x^2 = 6 \times 24$$

$$x = \pm \sqrt{144} = \pm 12.$$

Probe. $+6 \times +4 = 24$ und
$-6 \times -4 = 24.$

§. 104.

Zusatz. Allgemein ausgesprochen lautet die vorige Aufgabe so: Was ist es für eine Zahl, deren $m$theil mit ihrem $n$theil multiplicirt, zum Producte p giebt? Hier ist die Gleichung

$$\frac{x}{m} \times \frac{x}{n} = p$$

$$\frac{x^2}{mn} = p$$

$$x^2 = mnp$$

$$x = \pm \sqrt{mnp}.$$

Beyspiel. Es sey $m = 3$, $n = 5$ und $p = 140$, so ist $x = \sqrt{3 \times 5 \times 140} = \sqrt{2100} = 45,825756....$

§. 105.

IV. Aufgabe. Wenn a gegeben ist, so soll man x finden, damit $(x + a) \times (x - a) = b$ werde.

Auflösung. Aus der obigen Gleichung

$(x + a) \times (x - a) = b$ folget

$$x^2 - a^2 = b$$

$$x^2 = b + a^2$$

$$x = \pm \sqrt{(b + a^2)}$$

Beyspiel. Für $a = 6$ und $b = 64$ wird

$$x = \pm \sqrt{(64 + 36)} = \pm \sqrt{100} = \pm 10$$

Es ist aber auch $(10 + 6) \times (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$.

§. 106.

V. Aufgabe. Aus der Summe und Differenz der Quadrate zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Wenn die größere x, die kleinere y, die Summe s und die Differenz d heißt, so entstehen die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = s \quad \text{und} \quad x^2 - y^2 = d$$

$$x^2 = s - y^2 \qquad x^2 = d + y^2$$

$$s - y^2 = d + y^2$$

$$s - d = 2y^2$$

$$\frac{s - d}{2} = y^2 \text{ und } y = \sqrt{\frac{s - d}{2}}$$

Wird dieser Werth von y^2 in obige Gleichung $x^2 = d + y^2$ gesetzt, so erhält man

$$x^2 = d + \frac{s - d}{2}$$

$$x^2 = \frac{2d + s - d}{2}$$

$$x^2 = \frac{s + d}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{s + d}{2}}$$

Beyspiel. Es sey $s = \frac{25}{36}$, $d = \frac{7}{36}$, so wird

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{25 + 7}{36}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{32}{36}\right)} = \sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{25 - 7}{36}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{18}{36}\right)} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Wirklich ist nun $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$ und auch $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{36}$.

§. 107.

Lehrsatz. Jede bestimmte unreine quadratische Gleichung läßt sich auf die Form

$$x^2 \pm ax = b \text{ (A)}$$

bringen.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet am faßlichsten aus einigen Beyspielen.

I.) Die Gleichung sey

$$mx^2 + dx - n^2 = g + h, \text{ so ist}$$

$$mx^2 + dx = g + h + n^2$$

$$x^2 + \frac{d}{m}x = \frac{g + h + n^2}{m} \text{ (B)}$$

Setzt man hier $\frac{d}{m} = a$ und $\frac{g + h + n^2}{m} = b$, so bekömmt die Gleichung (B) die Form von (A).

II.) Es sey ferner

$$dx^2 - fx^2 + h = px + m, \text{ so wird}$$

$$dx^2 - fx^2 = px + m - h$$

$$(d - f)\,x^2 - px = m - h$$

$$x^2 - \frac{p}{d - f}x = \frac{m - h}{d - f} \text{ (C).}$$

Nimmt man hier $\frac{p}{d - f} = a$ und $\frac{m - h}{d - f} = b$, so hat die Gleichung (C) die Form

$$x^2 - ax = b$$

III.) Hätte man

$$-\frac{d}{x} + nx = 1 + h\,x; \text{ so wäre}$$

$$-d + nx^2 = x + hx^2$$

$$nx^2 - hx^2 - x = d$$

$$(n - h)\,x^2 - x = d$$

$$x^2 - \frac{1}{n-h}\,x = \frac{d}{n-h},$$ welche Gleichung wieder die allgemeine Form erhält, wenn man

$$\frac{1}{n-h} = a \text{ und } \frac{d}{n-h} = b \text{ setzt.}$$

Alle andere ähnliche Fälle lassen sich eben so behandeln.

§. 108.

Aufgabe. Die quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ aufzulösen.

Auflösung und Beweis. Wenn zu dem ersten Theile der Gleichung $x^2 + ax$ die Größe $\frac{a^2}{4}$ addirt wird, so erhält man $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$, und erkennet sogleich, daß diese Summe eine vollständige Quadratzahl ist, die $x + \frac{a}{2}$ zur Wurzel hat, denn $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$.

Setzt man daher diese $\frac{a^2}{4}$ auch zum andern Theile der Gleichung, so wird

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}.$$

2.) Zieht man nun auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so ist

$$\sqrt{\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)} \text{ oder}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}, \text{ folglich}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$$ wodurch die Gleichung aufgelößet ist.

§. 109.

Zusatz. Ueber die Auflößung der unreinen quadratischen Gleichungen lassen sich daher folgende Regeln geben:

I. Man bringe alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, in einen Theil der Gleichung zusammen;

II. Man befreye das Quadrat des Unbekannten von seinem Coefficienten, wenn es damit versehen ist.

III. Man füge jedem Theile der Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten der unbekannten Größe bey, wodurch der erste Theil jedesmal zu einem vollkommenen Quadrate wird. Wenn diese unbekannte Größe keinen Coefficienten in Buchstaben hat, so ist 1 dieser Coefficient.

IV. Man ziehe aus jedem Theile der Gleichung die Quadratwurzel, so wird dieselbe in eine einfache bestimmte verwandelt.

Anwendungen dieser Regeln werden folgende Aufgaben lehren.

§. 110.

I. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, welche fünfmal zu ihrem Quadrate gesetzt 104 zur Summe giebt.

Auflösung. Sie heiße x, so entsteht sogleich die Gleichung

$$x^2 + 5x = 104$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 104 + \frac{25}{4} \quad (\S.\ 109.\ \text{III})$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\left(104 + \frac{25}{4}\right)} \quad (\S.\ 109.\ \text{IV})$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(104 + \frac{25}{4}\right)}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{21}{2}$$

$$x = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{21}{2} \\ -\frac{5}{2} - \frac{21}{2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} = \frac{16}{2} = 8 \\ = -\frac{26}{2} = -13. \end{matrix}$$

Probe. Sowohl 8 als -13 wird der Foderung der Aufgabe entsprechen. Denn

$$8^2 + 5 \times 8 = 64 + 40 = 104$$
$$-13^2 + 5 \times -13 = 169 - 65 = 104$$

§. 111.

Anmerkung. Um vorstehende Aufgabe allgemein aufzulößen, frage man: was wird es für eine Zahl seyn, welche $n$mal ihrem Quadrate beygefügt, $= b$ ist?

Hier wird

$$x^2 + nx = b$$

$$x^2 + nx + \frac{n^2}{4} = b + \frac{n^2}{4}$$

$$x + \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\left(b + \frac{n^2}{4}\right)}$$

$$x = - \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{n^2}{4}\right)}$$

Setzt man für n und b willkührliche Werthe, so wird x meist irrational werden.

§. 112.

II. Aufgabe. Die Zahl 30 in zwey Theile zu theilen, deren Product = 161 ist.

Auflösung. Nennt man den einen Theil x, so ist der andere $30 - x$ und die Gleichung wird folgende:

$$x \times (30 - x) = 161.$$

$$30x - x^2 = 161$$

$$x^2 - 30x = - 161$$

$$x^2 - 30x + 15^2 = 15^2 - 161$$

$$x^2 - 30x + 225 = 225 - 161$$

$$x - 15 = \pm \sqrt{(225 - 161)}$$

$$x = 15 \pm \sqrt{64} = 15 \pm 8$$

$$x = \begin{pmatrix} 15 + 8 \\ 15 - 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} = 23. \\ = 7. \end{matrix}$$

Im ersten Falle ist $30 - x = 30 - 23 = 7$; im zweyten wird $30 - x = 30 - 7 = 23$. Folglich sind 23 und 7 die verlangten Zahlen; Ihre Summe ist $= 30$ und ihr Product 161.

§. 113.

III. Aufgabe. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und der Summe ihrer Quadrate die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Es seyen x und y die zu findenden Zahlen, a bedeute ihre Summe, und b die Summe ihrer Quadrate. Aus der Aufgabe entspringen folgende zwey Gleichungen:

$$x + y = a \text{ (A) und } x^2 + y^2 = b \text{ (B)}$$

Die erste Gleichung giebt $y = a - x$, folglich

$$y^2 = a^2 - 2ax + x^2.$$

Setzt man diesen Werth von y^2 in die Gleichung (B), so ist

$$x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b$$

$$2x^2 - 2ax = b - a^2$$

$$x^2 - ax = \frac{b - a^2}{2}$$

Wird hier der erste Theil (nach §. 109, III) zu einem vollkommenen Quadrate ergänzt, so ist

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}$$

$$x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}\right)} \text{ (§. 109, IV)}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}\right)} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{2b - 2a^2}{4}\right)}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2b - a^2}{4}\right)}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}.$$ Da nun oben $y = a - x$ war, so ist

$$y = a - \left(\frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}\right)$$

$$y = \frac{2a - a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

$$y = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

Beyspiel. I. Es sey $a = 7$ und $b = 25$, so wird

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(50 - 49)}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = 4 \text{ oder } 3;$$

und $y = \frac{7 \mp \sqrt{(50 - 49)}}{2} = \frac{7 \mp 1}{2} = 3$ oder 4. Folglich ist $x = 3$ und $y = 4$; oder $x = 4$ und $y = 3$.

Die Summe der Zahlen ist $= 4 + 3 = 7$; die Summe der Quadrate $= 16 + 9 = 25$.

II. Nähme man $a = 20$ und $b = 144$, so würde

$$x = 10 \pm \frac{\sqrt{(288 - 400)}}{2} = 10 \pm \frac{\sqrt{-112}}{2}$$

und $$y = 10 \mp \frac{\sqrt{(288 - 400)}}{2} = 10 \mp \frac{\sqrt{-112}}{2}$$

Da nun in beyden Formeln $\sqrt{-112}$ eine unmögliche Größe ist (§. 100, 1 und 2), so ist auch der Werth von x und y unmöglich. Es giebt daher keine zwey Zahlen, deren Summe = 20 und deren Quadrat-Summe 144 betragen kann.

§. 114.

Zusatz. Durch einen Kunstgriff, den man anwendet, kann vorhergehende Aufgabe leichter aufgelößet werden. Nennt man den halben Unterschied beyder Zahlen z, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{die größere} = \frac{a}{2} + z, \\ \text{die kleinere} = \frac{a}{2} - z\end{array}\right\} \text{(§. 83.)}$$

Das Quadrat der größeren ist also $= \frac{a^2}{4} + az + z^2$; das Quadrat der kleineren aber $= \frac{a^2}{4} - az + z^2$. Daher wird die Summe beyder Quadrate

$$= \frac{a^2}{2} + 2z^2 = b$$

$$2z^2 = b - \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b - a^2}{4}$$

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{2b - a^2}{4}\right)} = \pm \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2};$$

Folglich wird die größere der beyden Zahlen

$$= \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2};$$

die kleinere aber

$$= \frac{a}{2} \mp \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2},$$

welches die im vorigen §. gefundenen Werthe für die beyden Zahlen sind.

Beyspiel. Für $a = 10$ und $b = 58$ wird

$$z = \pm \frac{\sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{\pm \sqrt{16}}{2} = \pm \frac{4}{2} = \pm 2;$$

folglich ist die größere Zahl, oder $\frac{a}{2} + z = 5 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ 7, \end{cases}$

und die kleinere wird $\frac{a}{2} - z = 5 - \pm 2 = 5 \mp 2 = \begin{cases} 3 \\ 7. \end{cases}$

Nun wird auch $7 + 3 = 10$ und $49 + 9 = 58$.

§. 115.

IV. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und Unterschied dem Quadrate gleich sind.

Auflösung. Nennt man beyde Zahlen x und y und setzt $x > y$, so entstehen die Gleichungen

$x + y = xy$ (A), $x^2 - y^2 = xy$ (B) und

$x + y = x^2 - y^2$ (C). Da nun

$(x + y) \times (x - y) = x^2 - y^2$ ist, (wie die Rechnung lehret) so wird aus (C)

$$\frac{x + y = (x + y) \times (x - y)}{1 = x - y}$$

$$\overline{1 + y = x \text{ (D)}}$$

Setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (A) so ist

$$1 + 2y = y + y^2$$

$$1 + y = y^2$$

$$1 = y^2 - y$$

Wird nun hier $y^2 - y$ zu einem vollkommenen Quadrate ergänzt, so ist

$$1 + \frac{1}{4} = y^2 - y + \frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da nun (aus D) $x = 1 + y$, so wird

$$x = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Probe. 1) Da $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist die Summe $x + y = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{5} = 2 \pm \sqrt{5}$.

2) Das Product xy findet man durch diese Rechnung

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

$$\frac{(3 \pm \sqrt{5}) \times (1 \pm \sqrt{5})}{4} =$$

$$\frac{3 \pm 3\sqrt{5} \pm \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} =$$

$2 \pm \sqrt{5}$ = der Summe in 1).

3) Da $x^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5}) \times (3 \pm \sqrt{5})}{4} =$

$$\frac{9 \pm 3\sqrt{5} \pm 3\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4},$$

und $y^2 = \frac{(1 \pm \sqrt{5}) \times (1 \pm \sqrt{5})}{4} =$

$\frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4}$ ist, so

wird $x^2 - y^2 = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4} - \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$ = der Summe in 1) und dem Product in 2).

§. 116.

V. Aufgabe. Ein Kaufmann hatte auf der Messe mehrere Stücke Tuch für 180 Ducaten gekauft, die er bey seinem Commissionär zurückließ. Ehe das Tuch ankam, starb der Kaufmann plötzlich, und nach einiger Zeit schickte der Commissionär den Erben 10 Stücke Tuch. Man weiß nicht, ob diese Zahl richtig sey, erinnert sich aber, daß der Verstorbene gesagt hat, wenn er seinen Handel einen Tag früher gemacht hätte, so würde er für eben diese 180 Ducaten 3 Stücke mehr haben kaufen können, und das Stück wäre um 3 Ducaten wohlfei-

ler gewesen. Wie viele Stücke Tuch waren es wirklich?

Auflösung. Die eigentliche Anzahl der Stücke Tuch sey x, so ist $\frac{180}{x}$ der Preis eines Stücks. Eben so ist einleuchtend, daß eben dieser Preis, nach den Bedingnissen der Aufgabe, auch durch $\frac{180}{x+3}+3$ ausgedrückt werden kann. Daher hat man.

$$\frac{180}{x}=\frac{180}{x+3}+3$$

$$\frac{180}{x}=\frac{180+3x+9}{x+3}$$

$$180=\frac{180x+3x^2+9x}{x+3}$$

$$180x+180\times3=180x+3x^2+9x$$

$$180\times3=3x^2+9x$$

$$180=x^2+3x$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=180+\frac{9}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(180+\frac{9}{4}\right)}=\pm\sqrt{\left\{\frac{720+9}{4}\right\}}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ -\frac{3}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{30}{2} = -15. \end{cases}$$

Folglich ist die Zahl der angekauften Stücke Tuchs = 12. Der zweyte Werth, da er negativ ist, kann hier nicht anwendbar seyn.

Probe. $\frac{180}{12} = 15$ Ducaten. Hätte der Kaufmann seinen Handel einen Tag früher geschlossen, so würde er $12 + 3 = 15$ Stücke haben kaufen können und nun hätte ein Stück $\frac{180}{15} = 12$ Ducaten gekostet, also 3 Dukaten weniger, als im vorigen Falle.

§ 117.

Anmerkung. Die unbestimmten quadratischen Gleichungen, welche in vielen Fällen sehr nützlich sind, sollen hier, weil sie den ersten Anfängern leicht zu schwer scheinen, nur in einigen Beyspielen erläutert werden.

§. 118.

I. Aufgabe. Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe sich zur Summe ihrer Quadrate verhält $= m : n$.

Auflösung. Es seyen x und y beyde Zahlen, so entsteht aus der Aufgabe nur Eine Gleichung.

$$x + y : x^2 + y^2 = m : n$$

$$nx + ny = mx^2 + my^2 \quad (A)$$

$$ny - my^2 = mx^2 - nx$$

$$\frac{ny - my^2}{m} = x^2 - \frac{n}{m}x$$

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Wird nun für y ein bestimmter Zahlenwerth gesetzt, so ist nichts weiter zu thun, als eine bestimmte quadratische Gleichung aufzulösen, um den Werth von x zu finden.

Beyspiel. Es sey $m : n = 3 : 25$ und $y = 5$, so wird hier

$$\frac{ny - my^2}{m} = \frac{125 - 75}{3} = \frac{50}{3},$$

$$x^2 - \frac{25}{3} x = \frac{50}{3}$$

$$x^2 - \frac{25}{3} x + \frac{625}{36} = \frac{50}{3} + \frac{625}{36}$$

$$x - \frac{25}{6} = \pm \sqrt{\left(\frac{600 + 625}{36}\right)}$$

$$x - \frac{25}{6} = \pm \frac{\sqrt{1225}}{6} = \pm \frac{35}{6}$$

$$x = + \frac{25}{6} \pm \frac{35}{6}$$

$$x = \begin{cases} + \frac{25}{6} + \frac{35}{6} = \frac{60}{6} = 10 \\ + \frac{25}{6} - \frac{35}{6} = - \frac{10}{6} = - \frac{5}{3} \end{cases}$$

Jeder dieser zwey Werthe entspricht der Foderung. Denn $10 + 5 : 100 + 25 = 3 : 25$ und $- \frac{5}{3} + 5 : \frac{25}{9} + 25 = \frac{10}{3} : \frac{250}{9} = 30 : 250 = 3 : 25.$

§. 119.

Zusatz. Wenn man den Werth von y blos willkührlich annimmt, so wird x meist eine irrationale Zahl werden. Wäre z. B. $m : n = 1 : 4$ und $y = 1$, so ist $x = 2 \pm \sqrt{7}$; folglich irrational. Setzt nun die Aufgabe zum Voraus, daß die zu findende Größen ganze oder gebrochene Rationalgrößen seyn sollen, so ist eine neue Methode nöthig, welche nun kürzlich erläutert werden soll.

§. 120.

II. Aufgabe. Die Frage des vorigen §. in rationalen Größen zu beantworten.

Auflösung. Man nehme ein neues Unbekanntes z unter der Voraussetzung, daß $y = zx$ sey, so wird $y > x$ wenn $z > 1$, und $y < x$, wenn $z < 1$ ist. Durch diese Annahme verwandelt sich die Gleichung (A) (§. 118) $nx + ny = mx^2 + my^2$ in folgende $nx + nxz = mx^2 + mx^2z^2$, worin x gemeinschaftlicher Factor von allen Gliedern ist. Daher wird

$$n + nz = mx + mxz^2$$

$$\frac{n + nz}{m + mz^2} = x.$$ Da nun ferner $y = xz$,

so ist $y = \frac{nz + nz^2}{m + mz^2}$.

Wird nun der Werth von z rational genommen, so müßen es auch die Werthe von x und y werden, da x und y durch n, m und z bestimmt sind.

Beyspiele. I. Es sey $m = 1$, $n = 2$, $z = 1$, so wird, nach geführter Rechnung, $x = 2$ und $y = 2$, und es ist $2 + 2 : 4 + 4 = 1 : 2$.

II. Für $m = 1$, $n = 3$ und $z = 4$ wird $x = \frac{15}{17}$ und $y = \frac{60}{17}$, wo denn wieder $\frac{15}{17} + \frac{60}{17} : \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{60}{17}\right)^2 = 1 : 3$ u. s. w.

§. 121.

III. Aufgabe. Eine Quadratzahl zu finden, die von einer gegebenen Quadratzahl abgezogen, zum Reste wieder eine Quadratzahl giebt.

Auflösung. Die gegebene Quadratzahl sey a^2, die zu findenden Quadrate x^2 und y^2. Hier ist $a^2 - x^2 = y^2$ Nun sey

$$y = a - px, \text{ so wird}$$

$$a^2 - x^2 = a^2 - 2apx + p^2 x^2$$

$$- x^2 = - 2apx + p^2 x^2$$

$$x^2 = 2apx - p^2 x^2$$

$$x = 2ap - p^2 x$$

$$x + p^2 x = 2ap$$

$$x = \frac{2ap}{1 + p^2}, \text{ folglich}$$

$$y = a - \frac{2ap^2}{1 + p^2} = \frac{a + ap^2 - 2ap^2}{1 + p^2} = \frac{a - ap^2}{1 + p^2}.$$

Beyspiel. Nimmt man $a = 8$, $p = 2$, so wird

$$x = \frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{32}{5}, \text{ und}$$

$$y = \frac{8 - 8 \cdot 2 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{8 - 32}{5} = -\frac{24}{5}.$$

Auch ist nun $8 \cdot 8 - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \left(-\frac{24}{5}\right)^2$, wie die Rechnnng lehret.

§. 122.

IV. Aufgabe. Eine Quadratzahl zu finden, welche zu einer gegebenen Quadratzahl addirt, als Summe eine Quadratzahl hervorbringt.

Auflösung. Die gegebene Quadratzahl sey a^2, die zu findenden Quadrate x^2 und y^2, so ist $a^2 + x^2 = y^2$. Nun sey $y = p + x$, so wird

$$a^2 + x^2 = p^2 + 2px + x^2$$

$$a^2 - p^2 = 2px$$

$$\frac{a^2 - p^2}{2p} = x$$

Hierdurch findet sich nun

$$y = p + \frac{a^2 - p^2}{2p} = \frac{2p^2 + a^2 - p^2}{2p} = \frac{p^2 + a^2}{2p}.$$

Beyspiel. I. Für $a = 6$ und $p = 2$ wird $x = \frac{6 \cdot 6 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{36 - 4}{4} = \frac{32}{4} = 8$ und

$$y = \frac{2 \cdot 2 + 6 \cdot 6}{2 \cdot 2} = \frac{4 + 36}{4} = \frac{40}{4} = 10.$$

Auch ist nun $36 + 66 = 100$.

II. Setzt man $a = 9$ und $p = 4$, so wird $x = \frac{81 - 16}{8} = \frac{65}{8}$, und $y = \frac{16 + 81}{8} = \frac{97}{8}$ Hier ist nun wieder

$$81 + \left(\frac{65}{8}\right)^2 = \left(\frac{97}{8}\right)^2,$$ wie die wirkliche Rechnung lehret.

§. 123.

V. Aufgabe. Eine gegebene Quadratzahl in zwey andere Quadratzahlen zu theilen.

Auflösung. Wenn a^2 das gegebene Quadrat ist, und x^2, y^2 die zu findenden sind, so hat man $x^2 + y^2 = a^2$; folglich $y^2 = a^2 - x^2$ (A). Nimmt man nun $y = a - xz$ und erhebt jeden Theil zum Quadrate, so wird

$$y^2 = a^2 - 2axz + x^2z^2.$$

diesen Werth in die Gleichung (A) gesetzt, giebt

$$a^2 - 2axz + x^2z^2 = a^2 - x^2$$

$$x^2 + x^2z^2 = 2axz$$

$$x + xz^2 = 2az$$

$$(1 + z^2)x = 2az$$

$$x = \frac{2az}{1 + z^2}$$

Da nun $y = a - xz$, so ist $y = a - \frac{2az^2}{1 + z^2}$.

Beyspiele. I. Für $a = 3$, $z = 2$ wird

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{12}{5} \text{ und}$$

$$y = 3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = 3 - \frac{24}{5} = \frac{15 - 24}{5} = -\frac{9}{5},$$

wofür man als Quadratwurzel auch $+\frac{9}{5}$ setzen kann.

Hier ist auch $3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2$.

II. Für $a = 5$, $z = 3$, wird

$$x = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{1 + 3 \cdot 3} = \frac{30}{10} = 3 \text{ und}$$

$$y = 5 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3}{1 + 3 \cdot 3} = 5 - \frac{90}{10} = \frac{50 - 90}{10} =$$

∓ 4. Auch ist hier $25 = 9 + 16$.

Fünfter Abschnitt.

Geometrische Aufgaben.

§. 124.

Erklärung. Aus dem oben erklärten Begriffe der Algebra folget, daß sie sich nicht allein mit der Auffindung und Bestimmung unstetiger Größen beschäftige, sondern auch auf stetige Größen, d. h. Linien, Flächen und Körper angewendet werden könne.

Jene Anwendung ist in dem bisherigen vierten Abschnitte der Algebra, nach dem Bedürfnisse der ersten Anfänger, gezeigt worden. Der Gegenstand dieses fünften Abschnittes sey eine algebraische Betrachtung Geometrischer Gegenstände, welche so lehrreich, als unterhaltend seyn wird.

Die hieher gehörigen Aufgaben sind theils bestimmte, theils unbestimmte, theils einfache, theils höhere und so wie die zu findenden algebraischen Werthe ursprünglich aus geometrischen Sätzen hervorgehen, so führen diese sämmtlichen Ausdrücke hinwiederum auf geometrische Constructionen zurück. Da alles dieses durch wirkliche Beyspiele und mündliche Erläuterungen des Lehrers deutlicher wird, als durch allgemeine Regeln, so wollen wir gleich zur Sache selbst schreiten.

§. 125.

I. Aufgabe. Eine grade Linie dergestalt zu theilen, daß das Quadrat des größeren Abschnittes dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte gleich sey.

Wenn AC (*Fig.* 1.) die gegebene grade Linie ist, so soll ein Punct F in ihr gefunden werden, daß

$$AC : CF = CF : FA, \text{ oder}$$

$$CF^2 = AC \times FA \text{ ist.}$$

Auflösung. Es sey

$AC = a$

$CF = x$, so ist

$FA = a - x$, folglich entstehet aus der Foderung der Aufgabe die Gleichung:

$$x^2 = a \times (a - x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)} - \frac{a}{2}.$$

Da $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, und $\sqrt{5}$ jedesmal eine irrationale Zahl ist, so wird man für den ganzen Werth von x eine Irrationalgröße finden, wenn die Linie a in Zahlen gegeben wäre. Diese arithmetische Irrationalität

verschwindet hingegen durch die geometrische Construction des Werthes von x.

Geometrische Construction.

Man setze (*Fig.* 2.) $AC = DC = a$ rechtwinklig zusammen, nehme $CE = \frac{a}{2}$ in der Verlängerung von AC und ziehe DE, so ist $DE^2 = DC^2 + CE^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} a^2$; folglich wird $DE = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$. Macht man ferner $EF = ED$, so ist $CF = EF - CE = DE - CE = \sqrt{\left(\frac{5}{4} a^2\right)} - \frac{a}{2} = x$. Daher ist nun $CF^2 = AC \times FA$.

§. 126.

II. Aufgabe. Aus der gegebenen Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreyecks und seinem Inhalte das Dreyeck selbst zu bestimmen.

Auflösung. Es sey ABD (*Fcg.* 3.) das gegebene Dreyeck, sein Inhalt $= b^2$, die Hypotenuse $AB = a$ und die Höhe $DC = y$, so ist

$$\frac{a}{2} \times y = b^2$$

$$ay = 2b^2$$

$$y = \frac{2b^2}{a}$$

Beyspiel. Wäre $b = 64$, und $a = 16$, so wird

$$y = \frac{2 \times 64}{16} = 8.$$

Für $b^2 = 38$, $a = 10$, ist $y = \frac{2 \times 38}{10} = \frac{76}{10} = 7,6$.

Geometrische Construction. Der Ausdruck $y = \frac{2b^2}{a}$ giebt folgende Proportion

$$a : 2b = b : y.$$

Nun beschreibe man über $AB = a$ (*Fig.* 3.) einen Halbkreis, errichte aus A auf dieselbe das Loth $AE = 2b$, ziehe EB, mache $AG = \frac{1}{2} AE = b$, ziehe durch G die $GF \# BE$, durch F sodann die $FD \# AB$ und von A und B nach D die graden AD und BD, so ist ADB das verlangte Dreyeck. Denn da vermöge der Construction $\triangle AGF \backsim \triangle ABE$, so ist

$$AB : AE = AG : AF\ (= DH), \text{ d. h.}$$

$$a : 2b = b : \frac{2b^2}{a}\ (= y)$$

§. 127.

III. Aufgabe. Aus der gegebenen Summe der Catheten eines rechtwinkeligen Dreyecks und dem Lothe aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse die Seiten des Dreyecks selbst zu finden.

Auflösung. Es sey in dem

$\triangle ABC$ (*Fig.* 4.)

$$AC + AB = a$$
$$AC - AB = y$$
$$BC = x$$
$$AD = b, \text{ so ist}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = \frac{1}{2}(a + y) \text{ und} \\ AB = \frac{1}{2}(a - y) \end{array}\right\} (\S.\ 83.)$$

Da nun $BC^2 = AC^2 + AB^2$, so ist

$$x^2 = \left(\frac{a+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-y}{2}\right)^2 \text{ oder}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + 2ay + y^2) + \tfrac{1}{4}(a^2 - 2ay + y^2)$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2y^2) = \tfrac{1}{2}(a^2 + y^2)$$

$$2x^2 = a^2 + y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2 \text{ (A)} \quad \text{Nun ist}$$

$$BA : DA = BC : AC, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(a - y) : b = x : \tfrac{1}{2}(a + y), \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2 \text{ folglich nach (A)}$$

$$a^2 - 4bx = 2x^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2x^2 + 4bx$$

$$a^2 = x^2 + 2bx$$

$$a^2 + b^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} = x + b$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} - b = x$$

Geometrische Construction. Man beschreibe über die gegebene Linie CH (*Fig.* 4.) $= a$ ein Rechteck, dessen Höhe $HF = b$, und ziehe CF, so ist $CF = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Nimmt man nun $FE = FH = b$, so ist $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Wird nun über $CB = CE$ ein

Halbkreis beschrieben, der GF in A schneidet, und zieht man die geraden Linien CA und AB, so ist CAB das verlangte Dreyeck.

§. 128.

IV. Aufgabe. In der Cathete eines rechtwinkligen Dreyecks einen Punct zu finden, damit das Quadrat des daselbst errichteten, bis zur Hypotenuse verlängerten, Lothes dem Rechtecke aus beyden Segmenten dieser Cathete gleich sey.

Auflösung. Wenn CAB, (*Fig.* 5.) das gegebene Dreyeck ist, so soll der Punct D gefunden werden, daß $DE^2 = AD \times DB$.

Nun sey $AB = a$, $AC = b$, $BD = x$, folglich $DA = a - x$, und $DB \times DA = x \times (a - x) = ax - x^2$.

Da nun $DE \# AC$, so ist $\triangle\ EDB \backsim \triangle\ CAB$ und

$$BA : AC = BD : DE, \text{ oder}$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a} \ (= DE)$$

Daher ist $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, und man hat die Gleichung

$$\frac{b^2x^2}{a^2} = ax - x^2$$

$$b^2x^2 = a^3x - a^2x^2$$

$$b^2x = a^3 - a^2x$$

$$b^2x + a^2x = a^3$$

$$(a^2 + b^2)\, x = a^3$$

$$x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$$

Beyspiel. Setzt man $a = 8$, $b = 5$, so wird

$$x = \frac{512}{64 + 25} = \frac{512}{89} = 5{,}752 \ldots$$

Geometrische Construction. Aus $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$ folget $a^2 + b^2 : a^2 = a : x$. Zieht man nun aus A (*Fig.* 5.) ein Loth AE auf CB, und aus E ein Loth ED auf AB, so sind die hierdurch entstehenden rechtwinkligen Dreyecke sowohl unter sich, als dem $\triangle\ CAB$ ähnlich. Daher ist

$AB : BE = BE : BD$, folglich

$BE^2 = AB \times BD$; aber
$AB^2 = AB \times AB$, folglich auch

$AB^2 : BE^2 = AB : BD$. Nun ist ferner
$AB^2 : BE^2 = BC^2 : AB^2$, daher

$BC^2 : AB^2 = AB : BD$, oder algebraisch
$a^2 + b^2 : a^2 = a : x$. Folglich

---

wird auf BA der zu findende Punct D durch die beyden Lothe AE und ED bestimmt.

§. 129.

V. Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck ein Quadrat zu verzeichnen, welches auf der einen Seite desselben stehet, und mit seinen andern zwei Winkelpuncten die beyden übrigen Seiten des Dreyecks berühret.

Auflösung. Es sey ABC (*Fig.* 6.) das gegebene Dreyeck und $DEKF$ das zu construirende Quadrat. Wird hier aus A das Loth AH auf BC gezogen, so wird DF in

M geschnitten. Nun sey $BC = a$, $AH = h$, $AM = x$, folglich $MH = FK = DE = h - x$. Da nun DF $\#$ BC, so ist

$$BC : BA = DF : DA$$

$$BC : DF = BA : DA \text{ aber}$$
$$BA : DA = HA : MA$$

$$BC : DF = HA : MA \text{ oder}$$

$$a : DF = h : x \text{ und } DF = \frac{ax}{h}.$$

Da nun ferner $DF = FK = MH = h - x$, so hat man

$$\frac{ax}{h} = h - x$$

$$ax = h^2 - hx$$

$$ax + hx = h^2$$

$$(a + h)\, x = h^2$$

$$x = \frac{h^2}{a + h}.$$

Beyspiele. I. Für $a = 3$, $h = 6$, wird $x = \frac{36}{3 + 6} = \frac{36}{9} = 4$.

II. Für $a = 8$, $h = 6$ wird $x = \frac{36}{8 + 6} = \frac{36}{14} = 2,5714 \ldots$

Geometrische Construction. Zur geometrischen Construction dieses Werthes darf man nur, da aus $x = \frac{h^2}{a + h}$

die Proportion $a + h : h = h : x$ folget, zu den drey bekannten Linien die vierte Proportionallinie finden, welche $= AM$ ist. Indessen läßt sich auch folgendergestalt verfahren. Man beschreibe mit einem Halbmesser $AO = AH + BC$ aus A einen Bogen, der die über B verlängerte Grundlinie CB in O schneidet. Wird nun aus H das Loth HR auf AO gefällt, und sodann AR aus A auf AH getragen, so ist hierdurch der Punct M bestimmt, der die Lage der Parallele DF und der Lothe DE und FK zur Bildung des Quadrats $DFKE$ angiebt. Denn wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ARH und AOH ist

$$AH : AR = AO : AH$$

$$AH^2 = AR \times AO \text{ da nun}$$
$$AO^2 = AO \times AO, \text{ so ist}$$

$$AO^2 : AH^2 = AO : AR$$

$$AR = \frac{AH^2 \times AO}{AO^2} = \frac{AH^2}{AO}.$$

Drückt man diesen letzten Werth algebraisch aus, so wird $AR = AM = \frac{h^2}{a + h}$, wie in der vorigen Auflösung.

§. 130.

VI. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Seite des regelmäßigen Dreyecks zu finden, welches in demselben beschrieben werden kann.

Auflösung. Wenn EB (*Fig.* 7.) der Halbmesser ist, so beschreibe man den Kreis, trage den Radius aus B in D und ziehe DE. Wird nun das Loth BF auf DE gezogen und bis A verlängert; so ist BA die Seite des in den Kreis zu

construirenden gleichseitigen Dreyecks. Um sie zu finden, sey nun $EB = BD = DE = a$, $BA = x$, so ist

$$DF = \frac{a}{2} \text{ und } BF = \frac{x}{2}.$$

Da nun $BF^2 = DB^2 - DF^2$, so ist

$$\frac{x^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$x^2 = 3a^2$$

$x = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$, d. h. die Seite des in dem Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreyecks ist dem Producte aus dem Halbmesser in die Quadratwurzel von 3 gleich.

Da nun $\sqrt{3}$ eine arithmetische Irrationalgröße ist, so wird es auch der arithmetische Werth von $a\sqrt{3}$ seyn.

Geometrische Construction. Um obigen Werth $x^2 = 3a^2$ zu construiren, setze man $3a : x = x : a$, und suche nun zu $3a$ und a die mittlere geometrische Proportionallinie.

Dieses geschieht, wenn man (*Fig.* 8.) $AB = 3a$, $BC = a$ setzet, über AC einen Halbkreis beschreibet, und aus B das Loth BL errichtet, welches, da $BL^2 = AB \times BC$, die verlangte Dreyecksseite seyn muß.

§. 131.

Zusatz. I. Aus $x^2 = 3a^2$ folget $a^2 : x^2 = 1 : 3$, d. h. das Quadrat der Seite des regulairen Dreyecks ist dreymal so groß, als das Quadrat der Seite des regulairen Sechsecks in dem nämlichen Kreise.

II. Wenn die Seite des regulairen Dreyecks $= b$ gegeben ist, und man soll den Halbmesser des um dasselbe zu beschreibenden Kreises $= y$ finden, so wird

$3y^2 = b^2$; folglich

$y^2 = \frac{b^2}{3}$ und

$b : y = y : \frac{b}{3}$ d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Seite des gegebenen Dreyecks und dem Drittel dieser Seite.

III. Da die halbe Seite AB (*Fig.* 7.) oder BF der Sinus des Bogens BD von 60° ist, so kann man auch durch den obigen Ausdruck $\sqrt{3a^2} = x$ den Sinus des Winkels von 60° berechnen. Es ist nämlich $Sin.\ 60° = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2}$.

Setzt man $a = 1$, so wird $Sin.\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254$, wie ihn auch die Tafeln enthalten.

§. 132.

VII. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser des Kreises die Seite des in denselben zu beschreibenden regulairen Zehnecks zu finden.

Auflösung. Es sey (*Fig.* 9.) der gegebene Halbmesser $CA = a$, und $AB = x$ die Seite des Zehnecks, so ist der Bogen $AB = \frac{1}{10}$ der Peripherie, folglich $\angle ACB = 36°$; daher $\angle CAB = \angle CBA = 72°$. Macht man $AD = AC$ und zieht DC, so ist $\angle CDA = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle CAB = 36°$.

Folglich ist $\angle DCB = 72^\circ$ und $\triangle BCD \backsim \triangle BCA$. Daher $BD : BC = BC : BA$, oder

$$a + x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = ax + x^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\frac{5}{4} a^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4} a^2} = x + \frac{a}{2}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{a}{2} = x \text{ (A)}$$

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{5} - \frac{a}{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$$

$$x = a \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

$$x = a \times 0,6180340 \ldots \text{ (B)}$$

Man sieht hieraus, daß der Werth für die Seite des regulairen Zehnecks, arithmetisch betrachtet, eine Irrationalgröße sey.

Geometrische Construction. Man errichte auf des gegebenen Durchmessers AB (*Fig.* 10.) Mitte C den lothrechten Halbmesser CD, und theile CB in E in zwey gleiche Stücke, so ist $CE = \frac{a}{2}$; folglich

$$DE^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$DE = \sqrt{(\tfrac{5}{4} a^2)}.$$

Macht man nun $EF = ED$, so ist $CF = \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \frac{a}{2}$, folglich CF die zu findende Seite des Zehnecks. (A)

§. 133.

Zusatz. Da die halbe Seite des regulairen Zehnecks der Sinus des Winkels von 18° ist, so wird für den Halbmesser $a = 1$ (nach §. 132, B)

$$Sin.\ 18^\circ = \frac{x}{2} = \frac{1 \times 0{,}6180340}{2} = 0{,}3090170,$$

wie ihn auch die Tafeln geben.

§. 134.

VIII. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Seite des regulairen Fünfecks zu finden, welches in denselben beschrieben werden kann.

Auflösung. Es sey (*Fig.* 11.) CD $= a$, und die Seite des Fünfecks AB $= x$, so ist die Seite des Zehnecks, oder

$$DB = \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \frac{a}{2} \text{ (§. 132, A.)}.$$

Da nun $CE^2 = CB^2 - BE^2$, so ist

$$CE^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}, \text{ und}$$

$$CE = \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}; \text{ folglich}$$

$$DE = a - \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \text{ und}$$

$$DE^2 = a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)} + a^2 - \frac{x^2}{4},$$

oder $DE^2 = 2a^2 - \frac{x^2}{4} - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$

Weil nun $BE^2 = \frac{x^2}{4}$, so ist

$$DB^2 = DE^2 + BE^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \quad (A)$$

Da nun (nach §. 132, A)

$DB = \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} - \frac{a}{2}$, so wird

$DB^2 = \tfrac{5}{4}\, a^2 - 2\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} \times \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}$, oder

$DB^2 = \tfrac{6}{4}\, a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2}$.

Wird nun von dem oben (in A.) gefundenen Werthe von DB^2 der letztere abgezogen, so ist die Rechnung diese:

$$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$DB^2 = \tfrac{6}{4}\, a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2}$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\, a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\tfrac{1}{2}\, a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} = 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} = 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{2a}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4}a^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} + 2a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{5}{4}a^2 = 4a^2 - x^2$$

$$\tfrac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$x^2 = 4a^2 - \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x^2 = \tfrac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x^2 = a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}\,.$$

Da nun nach den oben gefundenen Ausdrücken

$a^2 = DC^2$, und

$DB^2 = \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$, auch

$AB^2 = x^2$, so hat man

$AB^2 = DC^2 + DB^2$, oder:

das Quadrat der Seite des regulairen Fünfecks ist so groß, als das Quadrat der Seite des regulairen Sechsecks und jenes des regulairen Zehnecks zusammengenommen.

Geometrische Construction. Wenn also der Halbmesser des Kreises und die Seite des regulairen Zehnecks gegeben sind, so läßt sich die Seite des Fünfecks geometrisch bestimmen, wenn man jene Linien als Catheten betrachtet, und die dazugehörige Hypotenuse zieht.

§. 135.

IX. Aufgabe. In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, daß dessen Umfang sowohl den Bogen, als die beyden Halbmesser berühret.

Auflösung. Es sey ACB (*Fig.* 12.) der gegebene Quadrant, dessen Halbmesser $BA = BE = BC = a$, und EFG der zu findende Kreis. Zieht man aus D nach den Berührungspuncten E, F und G die graden Linien DE, DF und DG, so ist $< DFB = < DGB = R = GBF = GDF$; folglich $DFGB$, weil $DF = DG$, ein Quadrat, und $< GBD = \frac{1}{2} R$.

Wird nun BD verlängert, so muß sie durch den Berührungspunct E gehen (*El. III*, 11.)

Setzt man nun $DE = DF = DG = x$, so ist $DB = \sqrt{(DF^2 + BF^2)} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, folglich $BE = BD + DE = x\sqrt{2} + x$. Da nun $BE = a$, so ist

$$x\sqrt{2} + x = a$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = a$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1}$$

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1)}$$

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{1} = a \times (\sqrt{2} - 1),$$

$$x = a\sqrt{2} - a = \sqrt{2a^2} - a.$$

Geometrische Construction. Man halbire den rechten Winkel CBA durch BE, welche den Bogen in E schneidet, und ziehe von E die Tangente EH, welche die verlängerte BA in H schneidet. Macht man nun $BG = AH$, errichtet aus G das Loth GD, so ist der Punct D des zu findenden Kreises Mittelpunct und DG dessen Halbmesser. Denn da $< ABE = \frac{1}{2} R$ und $< BEH = R$, so ist

auch $< H = \frac{1}{2} R$, und $BE = EH = a$; folglich $BH = \sqrt{(BE^2 + EH^2)} = \sqrt{2a^2}$, und $BG = AH = BH - BA = \sqrt{2a^2} - a$.

§. 136.

X. Aufgabe. In der Cathete eines rechtwinkeligen Dreyecks einen Punct zu finden, der die Lage hat, daß ein daselbst errichtetes und bis zur Hypotenuse verlängertes Loth das ganze Dreyeck in zwey gleiche Theile theile.

Auflösung. Es sey ABC (*Fig.* 13.) das gegebene Dreyeck, und DE das zu findende Loth; so nenne man $BC = a$, $AB = b$ und $CD = x$. Da nun $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$, so ist $BC : AB = DC : ED$, oder

$$a : b = x : \frac{bx}{a} \; (= ED),$$

Folglich wird der Inhalt des $\triangle EDC = ED \times \frac{1}{2} DC = x \times \frac{bx}{2a} = \frac{bx^2}{2a}$. Aber der Inhalt des $\triangle ABC = AB \times \frac{1}{2} BC = \frac{ab}{2}$ und man hat, da $\triangle EDC = \frac{1}{2} \triangle ABC$ seyn soll, die Gleichung

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{ab}{4}$$

$$4bx^2 = 2a^2b$$

$$2bx^2 = a^2b$$

$$x^2 = \frac{a^2b}{2b} = \frac{a^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}.$$

Geometrische Construction. Man halbire BC in F, beschreibe aus F mit BF den Halbkreis BGC, errichte das Loth FG, ziehe BG und CG und mache $CD = CG$, so ist D der gesuchte Punct. Denn da $BG = CG$, so ist $CB^2 = 2CG^2$, oder $a^2 = 2CG^2$, daher denn $\frac{a^2}{2} = CG^2$, und $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = CG$ wird.

§. 137.

Zusatz. I. Da nach der Foderung der vorigen Aufgabe auch das Paralleltrapez $ABDE = \frac{1}{2} \triangle ABC$ seyn muß, so entstehet hieraus folgende Gleichung, deren Bildung und Auflösung eine lehrreiche Uebung für Anfänger ist. Nämlich:

$$\left(b + \frac{bx}{a}\right) \times \frac{a - x}{2} = \frac{ab}{4}$$

$$\frac{ab + bx}{a} \times \frac{a - x}{2} = \frac{ab}{4}$$

$$\frac{(a + x)\ b \times a - x}{2a} = \frac{ab}{4}$$

$$(a^2 - x^2)\ b = \frac{2a^2b}{4} = \frac{a^2b}{2}$$

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 - \frac{a^2}{2} = x^2$$

$$\frac{a^2}{2} = x^2, \text{ wie oben.}$$

§. 138.

Zusatz. II. Um zu zeigen, daß die Aufgabe in §. 136. nicht allein von rechtwinkligen Dreyecken gilt, sondern auch auf spitz- und stumpfwinkelige ausgedehnt werden kann, bemerke man Folgendes: Soll man z. B. in der Grundlinie BC, (*Fig.* 14.) des $\triangle ABC$ einen Punct D finden, der die Lage hat, daß eine durch ihn mit BA gezogene Parallele DE das ganze Dreyeck halbiret, so ziehe man die Lothe AG und EF und setze $AB = a$, $BC = b$, $AG = d$ und $DC = x$, so findet man EF durch folgende Proportion:

$$b : x = d : \frac{dx}{b} (= EF).$$

Nun ist $\triangle ABC = \frac{db}{2}$, folglich $\frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{db}{4}$, und $\triangle DEC$ wird $= \frac{dx}{b} \times \frac{x}{2} = \frac{dx^2}{2b}$. Daher hat man die Gleichung

$$\frac{dx^2}{2b} = \frac{db}{4}$$

$$4dx^2 = 2db^2$$

$$4x^2 = 2b^2$$

$$x^2 = \frac{b^2}{2}$$

$x = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$. Hieraus erhellet, daß dieser Fall

der allgemeine, der in §. 136. enthaltene, aber nur ein besonderer davon sey.

§. 139.

Zusatz III. Eben diese Aufgabe läßt sich auch noch kürzer auf folgende Weise auflösen.

Da $\triangle$ *EDC* $= \frac{1}{2} \triangle$ *ABC* seyn soll, und zugleich $\triangle$ *EDC* $\backsim \triangle$ *ABC*, so hat man

$\triangle ABC : \triangle EDC = BC^2 : DC^2$, d. h.

$$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{4} = a^2 : x^2$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = a^2 : x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a^2$$

$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, wie oben (§. 136.).

§. 140.

Zusatz. IV. Ganz allgemein könnte man nun fragen, wie der Punct *D* auf *CB* genommen werden müße, damit $\triangle$ *EDC* $= \frac{1}{n} \triangle$ *ABC* werde?

Hier verhält sich wieder

$\triangle ABC : \triangle EDC = BC^2 : DC^2$, oder

$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{2n} = a^2 : x^2$, folglich

$$x^2 = \frac{a^2}{2n} \times 2 = \frac{2a^2}{2n} = \frac{a^2}{n}, \text{ daher}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{n}}.$$

Beyspiel. Sollte $\triangle EDC$ z. B. der 7te Theil vom $\triangle ABC$ werden, so wäre $x = \sqrt{\frac{a^2}{7}} = \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{a}{2,6457513\ldots}$ u. s. w.

§. 141.

Zusatz. V. Sollte das zu findende $\triangle EDC = \frac{n}{m} \triangle ABC$ werden, wobey man $n < m$ annimmt, so würde aus der Proportion:

$$\triangle ABC : \triangle EDC = BC^2 : DC^2,$$

nun $\frac{ab}{2} : \frac{nab}{2m} = a^2 : x^2$, oder

$$\tfrac{1}{2} : \frac{n}{2m} = a^2 : x^2; \text{ folglich}$$

$$x^2 = \frac{a^2 n}{2m} \times 2 = \frac{2a^2 n}{2m} = \frac{a^2 n}{m}, \text{ daher}$$

$x = \sqrt{\frac{na^2}{m}} = a\sqrt{\frac{n}{m}}$. — Wie übrigens die in §. 136 und hier gefundenen Werthe geometrisch construirt werden können, ist nicht schwer zu übersehen, und wird dem mündlichen Vortrage zur Erläuterung überlassen.

§. 142.

XI. Aufgabe. Jedes Dreyeck durch ein auf einer Seite desselben errichtetes Loth, welches mit keiner Dreyecksseite gleichlaufend ist, zu halbiren.

Auflösung. Das $\triangle BAC$ (*Fig.* 15.) soll durch das auf BC errichtete Loth EF so getheilt werden, daß $\triangle FEC = \frac{1}{2} \triangle ABC$. Wäre hier $BA = AC$, oder das gegebene Dreyeck gleichschenkelig, so läge der zu findende Punct E in der Mitte der Grundlinie BC. Fällt der Punct D des von A auf BC gezogenen Lothes AD so, daß $BD < DC$ ist, so muß $\triangle ADB < \triangle ADC$ seyn, und der Punct E des zu ziehenden Lothes EF muß zwischen D und C liegen.

Diesen letzten Fall angenommen sey hier $BC = a$, des Dreyecks ABC Höhe $AD = b$, $CD = c$, und $CE = x$.

Da nun $\triangle ADC \backsim \triangle FEC$, so hat man

$$CD : DA = CE : EF, \text{ d. h.}$$

$$c : b = x : \frac{bx}{c} (= EF)$$

und $\frac{bx}{c} \times \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2c}$ ist der Inhalt des Dreyecks FEC, so wie $\frac{ab}{2}$ jener des $\triangle ABC$ ist. Daher entsteht nach der Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{bx^2}{2c} = \frac{ab}{4}$$

$$4bx^2 = 2a\,bc$$

$$x^2 = \frac{2a\,bc}{4b} = \frac{ac}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{ac}{2}}.$$

Geometrische Construction. Um den Werth $x^2 = \frac{ac}{2}$ zu construiren, setze man $\frac{a}{2} : x = x : c$, woraus fol-

gende Construction flieset. Man setze $\frac{a}{2}$ und c in eine grade Linie zusammen, beschreibe über dieselbe einen Halbkreis, errichte aus dem Vereinigungspuncte dieser Linien ein Loth bis zur Peripherie, so ist dieses der zu suchende Werth von x.

§. 143.

XII. Aufgabe. Aus einem in der Grundlinie eines Dreyecks gegebenen Puncte eine grade Linie durch dasselbe zu ziehen, wodurch diese Figur halbirt wird.

Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ABC (*Fig.* 16.) und D der in BC gewählte Punct. Läge dieser in der Mitte von BC, so müßte die grade Linie von D nach A gezogen werden, um die Aufgabe zu lösen. Befindet sich aber D (wie hier) näher bey B, als bey C, so muß die Theilungslinie die Seite AC schneiden. Dies geschehe in E, so setze man CE $= x$. Ferner ziehe man die Lothe AF und EG, und setze BC $= a$, CD $= b$, AF $= c$, AC $= d$. Da hier $\triangle$ AFC $\backsim$ $\triangle$ EGC, so ist

$$CA : AF = CE : EG, \text{ d. h.}$$

$$d : c = x : \frac{cx}{d}.$$

Der Inhalt des $\triangle$ DEC ist also $= \frac{cx}{d} \times \frac{b}{2} = \frac{bcx}{2d}$; desgleichen wird die Fläche des $\triangle$ ABC $= \frac{ac}{2}$, und man hat, nach der Foderung der Aufgabe

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{ac}{4}$$

$$4bcx = 2acd$$

$$2bx = ad$$

$$x = \frac{ad}{2b}$$

Geometrische Construction. Da aus $x = \frac{ad}{2b}$ die Proportion

$2b : a = d : x$ folget, so darf man, um x zu finden, nur zu $2b$, a und d die vierte Proportionallinie suchen.

§. 144.

Zusatz. Wenn durch die Linie DE irgend ein bestimmter Theil, z. B. $\frac{n}{m}$ des $\triangle$ BAC abgeschnitten werden sollte, so wäre

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{n}{m} \times \frac{ac}{2}$$

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{acn}{2m}$$

$$2bcmx = 2acdn$$

$$bmx = adn$$

$$x = \frac{adn}{bm}$$

Um diesen Werth zu construiren, suche man zu $m$mal b, $n$mal a und d die vierte geometrische Proportionallinie, denn es verhält sich $mb : na = d : x$

§. 145.

XIII. Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyecks die Größe seines Flächenraumes zu finden.

Auflösung. Wenn man in dem $\triangle$ ABC, (*Fig.* 17.) AB $= m$, AC $= q$, das Loth AD $= d$, BD $= n$, DC $= p$ und BC $= n + p = s$ setzt, so ist

$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(m + q + s).(m + q - s).(m + s - q).(q + s - m)}$.

Analytischer Beweis. Wird die blos angezeigte Multiplication wirklich ausgeführt, so erhält man nach geschehener Reduction, Folgendes

$$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(2m^2q^2 + 2m^2s^2 + 2q^2s^2 - q^4 - m^4 - s^4)}\,(\alpha)$$

worin die Wurzelgröße aus sechs abgesonderten Größen, drey positiven und drey negativen, bestehet.

Da nun $m^2 = d^2 + n^2$, $q^2 = d^2 + p^2$ und $s = n + p$, so geben jene sechs Größen Nachstehendes:

I. Glied, oder $2m^2q^2 = 2(d^2 + n^2) \times (d^2 + p^2)$
$= (2d^2 + 2n^2) \times (d^2 + p^2)$
$= 2d^4 + 2d^2p^2 + 2n^2d^2 + 2n^2p^2$.

II. Glied, oder $2m^2s^2 = 2(d^2 + n^2) \times (n + p)^2$
$= (2d^2 + 2n^2) \times (n^2 + 2np + p^2)$
$= 2d^2n^2 + 4d^2np + 2d^2p^2 + 2n^4 + 4n^3p + 2n^2p^2$.

III. Glied, oder $2q^2s^2 = 2(d^2 + p^2) \times (n + p)^2$
$= (2d^2 + 2p^2) \times (n^2 + 2np + p^2)$
$= 2d^2n^2 + 4d^2np + 2d^2p^2 + 2p^2n^2 + 4np^3 + 2p^4$.

IV. Glied, oder $-q^4 = -(d^2 + p^2)^2 = -d^4 - 2d^2p^2 - p^4$.

V. Glied, oder $-m^4 = -(d^2 + n^2)^2 = -d^4 - 2d^2n^2 - n^4$.

VI. Glied, oder $-s^4 = -(n + p)^4 = -n^4 - 4n^3p - 6n^2p^2 - 4np^3 - p^4$.

Setzt man nun die drey ersten Glieder, da sie positiv sind, zusammen, so entstehet folgende

$$\text{Summe}\left\{\begin{array}{l} 2d^4 + 2d^2p^2 + 2d^2n^2 + 2n^2d^2 + 2p^2n^2 \\ + 4npd^2 + 2p^2d^2 + 2n^4 + 4n^3p + 2p^2n^2 \\ + 2n^2d^2 + 4npd^2 + 2p^2d^2 + 2n^2p^2 + 4np^3 + 2p^4. \end{array}\right.$$

oder reducirt. $\left\{\begin{matrix} 2d^4 + 6d^2p^2 + 6d^2n^2 + 6p^2n^2 + 8npd^2 \\ + 2n^4 + 4n^3p + 4np^3 + 2p^4 \end{matrix}\right\}$ (A)

Aus der Addition der drey letzten negativen Glieder entspringt nun folgende negative

Summe $\left\{\begin{matrix} - d^4 - 2d^2p^2 - p^4 - d^4 - 2d^2n^2 - n^4 \\ - n^4 - 4n^3p - 6n^2p^2 - 4np^3 - p^4. \end{matrix}\right\}$ (B)

Vergleichet man nun diese beyde Summen (A) und (B) mit einander, so heben sich die meisten Glieder gegenseitig auf, und es bleibt noch

$$4d^2p^2 + 4d^2n^2 + 8npd^2 \text{ übrig.}$$

Daher wird nun die obige Gleichung (α) in nachstehende verwandelt

$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(4d^2p^2 + 4d^2n^2 + 8npd^2)}$ oder
da $\sqrt{(4d^2p^2 + 8npd^2 + 4d^2n^2)} = 2dp + 2dn$ ist,
$\triangle ABC = \frac{1}{4}(2dp + 2dn) = \frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dn.$

Da nun $\frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dn$ wirklich den Inhalt des $\triangle$ ABC angiebt, so ist hierdurch die Richtigkeit der in der Auflösung stehenden Formel erwiesen.

§. 146.

Zusatz. Die in dem vorigen §. erwiesene Formel kann auf folgende Weise bequemer eingerichtet werden:

Es sey die halbe Summe der drey Seiten a, b und c des Dreyecks, oder

$\frac{a + b + c}{2} = S$, so wird

1.) $a + b + c = 2S$

2.) $a + b - c = 2S - 2c$

3.) $a + c - b = 2S - 2b$, und

4.) $b + c - a = 2S - 2a$.

Werden diese Werthe in obige Formel gesetzt, so ist, wenn die Dreyecksebene F heißt,

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[2S \,.\, (2S-2c) \,.\, (2S-2b) \,.\, (2S-2a)]}.$$

Da nun z. B. $\frac{1}{4}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{4} = \sqrt{\frac{n}{16}}$ ist, so wird

$$F = \sqrt{\left(\frac{2S \,.\, (2S-2c) \,.\, (2S-2b) \,.\, (2S-2a)}{16}\right)}, \text{ oder}$$

$$F = \sqrt{\left(\frac{2S}{2} \,.\, \frac{2S-2c}{2} \,.\, \frac{2S-2b}{2} \,.\, \frac{2S-2a}{2}\right)}, \text{ folglich}$$

$$F = \sqrt{[S \,.\, (S-c) \,.\, (S-b) \,.\, (S-a)]}.$$

Hieraus entspringt die Regel:

Man ziehe von der halben Summe der drey Seiten jede Seite einzeln ab, multiplicire diese drey Reste mit der halben Summe, und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel, so giebt diese des Dreyecks Inhalt.

§. 147.

Anmerkung. Von der Wichtigkeit dieser Formel und ihrer Anwendung auf einzelne Beyspiele in den Vorlesungen.

§. 148.

XIV. Aufgabe. Wenn die vier Seiten eines in den Kreis beschriebenen Vierecks nebst der einen Diagonale desselben gegeben sind, die andere Diagonallinie zu finden.

In dem Vierecke EBCA, (*Fig.* 18.) sind die Seiten EA $= a$, EB $= b$, BC $= c$, CA $= d$, und die Diagonale EC $= f$ gegeben, man soll AB finden.

Auflösung. Man setze AB $= x$, und ziehe EF, daß $< \text{BEF} = < \text{AEC}$. Da nun noch $< \text{ECA} = < \text{EBA}$, so ist $\triangle \text{ECA} \backsim \triangle \text{EFB}$, und man hat

$$\text{EC} : \text{AC} = \text{EB} : \text{BF}, \text{ d. h.}$$

$$f : d = b : \text{BF},$$

folglich ist BF $= \dfrac{bd}{f}$.

Weil nun ferner $< \text{EAB} = < \text{ECB}$, und $< \text{AEF} = < \text{CEB}$, so ist $\triangle \text{AEF} \backsim \triangle \text{ECB}$, und man hat

$$\text{EC} : \text{CB} = \text{EA} : \text{AF}, \text{ d. h.}$$

$$f : c = a : \text{AF},$$

folglich AF $= \dfrac{ac}{f}$. Da nun BF + AF = AB, so entstehet die Gleichung

$$\frac{bd}{f} + \frac{ac}{f} = x = \frac{bd + ac}{f}$$

$$bd + ac = fx$$

Aus dieser letzten Gleichung entspringt folgender Lehrsatz: Bey jedem in einen Kreis beschriebenen Vierecke sind die beyden Rechtecke aus dessen gegenüber liegenden Seiten zusammengenommen dem Rechtecke aus beyden Diagonallinien gleich.

§. 149.

XV. Aufgabe. Einen Kreis zu finden, dessen Fläche der krummen Seitenfläche eines gegebenen senkrechten Cylinders gleich ist.

Auflösung. Des Cylinders Durchmesser heiße d, dessen Höhe h, der Durchmesser des zu findenden Kreises sey x. Wenn man die Ludolphische Zahl π nennet, so ist die krumme Seitenfläche des Cylinders $= d\pi h$, die Ebene des zu findenden Kreises aber $= x\pi \times \frac{x}{4} = \frac{x^2\pi}{4}$.

Folglich hat man die Gleichung

$$d\pi h = \frac{x^2\pi}{4}$$

$$dh = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 = 4dh$$

$$x = \sqrt{4dh} = 2\sqrt{dh}$$

$$\tfrac{1}{2}x = \sqrt{dh}.$$

d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist der Quadratwurzel aus dem Producte der Höhe des Cylinders in dessen Durchmesser gleich.

Um diesen Halbmesser geometrisch zu construiren, darf man nur zwischen der Höhe und dem Durchmesser des Cylinders die mittlere geometrische Proportionallinie suchen.

§. 150.

XVI. Aufgabe. Aus der gegebenen Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche eines Kegels den Durchmesser eines

Cylenders zu finden, welcher mit ihm einerley Höhe und Inhalt hat.

Auflösung. Es sey des Kegels Durchmesser $= d$, seine Höhe $= a$ und der Durchmesser des zu findenden Cylinders $= x$, so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{d^2 \pi}{4} \times \frac{a}{3} = \frac{ad^2 \pi}{12}$, und jener des Cylinders $= \frac{x^2 \pi}{4} \times a = \frac{ax^2 \pi}{4}$. Daher wird die Gleichung

$$\frac{ad^2 \pi}{12} = \frac{ax^2 \pi}{4}$$

$$\frac{d^2}{12} = \frac{x^2}{4}$$

$$4d^2 = 12x^2$$

$$d^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{d^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Geometrische Construction. Aus $x^2 = \frac{d^2}{3}$, folget $x^2 = \frac{d}{3} \times d$, folglich $\frac{d}{3} : x = x : d$. Daher ist der zu findende Durchmesser die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem gegebenen Durchmesser und dem dritten Theile dieses Durchmessers.

§. 151.

XVII. Aufgabe. Den Durchmesser einer Kugel zu finden, in welche ein gegebener Würfel beschrieben werden soll.

Auflösung. Wenn man sich eine grade Linie von einem Winkelpuncte des Würfels durch seine Mitte nach dem entgegengesetzten Winkelpuncte vorstellet, so ist diese der Durchmesser der zu construirenden Kugel. Leget man durch diese Linie eine Diagonalebene, so entstehet ein rechtwinkeliges Dreyeck, dessen Hypotenuse die eben bemerkte Linie, dessen eine Cathete die eine Seite des Würfels und dessen andere Cathete die Diagonale der Seitenfläche dieses Würfels ist. Setzt man nun des Würfels Seite $= a$, so wird dieser Diagonallinie Quadrat $= 2a^2$, und folglich das Quadrat der durch den Würfel gezogenen Querlinie $= 2a^2 + a^2 = 3a^2$. Daher ist, wenn diese Querlinie x heißt,

$$x^2 = 3a^2$$

$$x = \sqrt{3a^2}$$

Geometrische Construction. Sollte dieser Werth von x nach der gefundenen Formel construirt werden, so ist

$$3a : x = x : a$$

Es kömmt also nur darauf an, zwischen $3a$ und a eine mittlere geometrische Proportionallinie zu finden, welche $=$ x seyn wird.

§. 152.

Zusatz. Aus der Formel

$x^2 = 3a^2$, folget

$$\frac{x^2}{3} = a^2 \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}} = a.$$

Wenn daher x bekannt ist, so kann a gefunden werden, d. h. es läßt sich aus dem gegebenen Durchmesser einer Kugel die Seite des Würfels finden, welcher in dieselbe beschrieben werden kann.

Da aus der Gleichung $a^2 = \frac{x^2}{3}$ die Proportion

$\frac{x}{3} : a = a : x$ folget, so kann der Werth von a leicht durch Construction gefunden werden, wenn man zu $\frac{x}{3}$ und x die mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

§. 153.

XVIII. Aufgabe. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher entstehet, indem sich ein Kreisabschnitt um den mit dessen Sehne parallelen Durchmesser einmal ganz herumbeweget.

Auflösung. Es sey CFK (*Fig.* 19.) der gegebene Abschnitt des Kreises ALHK, so soll der Inhalt des ringförmigen Körpers gefunden werden, welcher durch Umdrehung dieses Abschnittes um den Durchmesser AH erzeugt wird.

Da durch Umdrehung des Halbkreises AKH um A H eine Kugel, durch Umdrehung der Ebenen ADC und HGF aber Kugelabschnitte, und durch Umwälzung des Rechtecks DCFG ein senkrechter Cylinder entstehet, so darf man nur

von dem Inhalte der Kugel jenen der beyden Abschnitte und dieses Cylinders hinwegnehmen, um den Körperinhalt des ringförmigen Körpers zu erhalten.

Setzt man nun die Höhe der Kugelabschnitte AD = HG = h, den Halbmesser der Kugel = r, so ist aus der Stereometrie bekannt, daß der Abschnitt BAC = $\frac{1}{3}\pi h^2 + (3r - h) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$ folglich Abschn. BAC + Abschn. JHF = $2\pi h^2 r - \frac{2}{3}\pi h^3$.

Nun ist DC, als mittlere Proportionallinie zwischen AD und DH,

$$= \sqrt{(h \times (2r - h))} = \sqrt{(2rh - h^2)};$$

folglich ist die Fläche des Kreises um DC = $\pi(2rh - h^2)$.

Da nun DG = $2r - 2h$, so wird der Inhalt des Cylinders BCFJ = $(2\pi hr - \pi h^2) . (2r - 2h) = 2\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 6\pi h^2 r$.

Hiezu die zwey Abschn. = $-\frac{2}{3}\pi h^3 + 2\pi h^2 r$

addirt, giebt zur Summe $\frac{4}{3}\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 4\pi h^2 r$.

Da nun der Kugel ALHF Inhalt = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ist, so wird, wenn der Inhalt des ringförmigen Körpers x heißt,

$$x = \frac{4}{3}\pi r^3 - (\frac{4}{3}\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 4\pi h^2 r)$$

$$x = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi h^3 - 4\pi hr^2 + 4\pi h^2 r.$$

$$x = \frac{4}{3}\pi(r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3).$$

Da nun dieser Werth von x der Inhalt einer Kugel ausdrückt, deren Halbmesser = $r - h$ ist, dieses $r - h$ aber

so groß ist, wie DE oder $\frac{1}{2}$ CF, so erhellet, daß der Inhalt des ringförmigen Körpers dem Inhalte einer Kugel von dem Durchmesser CF gleich ist.

§. 154.

XIX. Aufgabe. Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyecks und den daranliegenden Winkeln dessen Höhe zu finden.

Auflösung. In dem Dreyecke LHJ (*Fig.* 20.) ist HJ = a, nebst den Winkeln H und J gegeben; man suchet das Loth LM = x.

Hier ist

$$sin.\,o : cos.\,o = x : \frac{cos.\,o \times x}{sin.\,o} \;(= \text{MJ})$$ ferner

$$sin.\,u : cos.\,u = x : \frac{cos.\,u \times x}{sin.\,u} \;(= \text{MH})$$

Folglich hat man

$$\frac{cos.\,o \times x}{sin.\,o} + \frac{cos.\,u \times x}{sin.\,u} = a\,(= \text{HJ})$$

$$x \times \left(\frac{cos.\,o}{sin.\,o} + \frac{cos.\,u}{sin.\,u}\right) = a$$

$$x = \frac{a}{\frac{cos.\ o}{sin.\ o} + \frac{cos.\ u}{sin.\ u}} = \frac{a}{\frac{cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o}{sin.\ o \times sin.\ u}} =$$

$$\frac{a \times sin.\ o \times sin.\ u}{cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o} \quad (A)$$

§. 155.

Zusatz. I. Da die Factoren *sin. o*, *sin. u*, *cos. o* und *cos. u* Decimalbrüche sind, welche aus vielen Decimalstellen bestehen, so rechnet man den Werth von x am bequemsten durch Logerithmen.

II. Aus der Formel (A) fließet folgende Proportion: $cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o : sin.\ o \times sin\ u = a : x$, d. h. die Summe der Rechtecke aus Cosinus des einen der gegebenen Winkel in den Sinus des andern verhält sich zu dem Rechtecke aus den beyden

Sinus dieser Winkel, wie des Dreyecks Grundlinie zu seiner Höhe.

§. 156.

XX. Aufgabe. Aus der Summe zweyer Seiten eines Dreyecks und den ihnen gegenüber liegenden Winkeln jene Seiten selbst zu finden.

In dem Dreyecke HLJ (*Fig.* 20.) sey HL + LJ und die Winkel H und J gegeben. Man sucht die Seiten LH und LJ selbst.

Auflösung. Es sey HL + LJ = a, und HL = x, so ist LJ = $a - x$, und man hat

$$x : \sin. o = a - x : \sin. u$$

$$x \times \sin. u = (a - x) \times \sin. o$$

$$x \times \sin. u = a . \sin. o - x \sin. o .$$

$$x \times \sin. u + x \sin. o = a \times \sin. o$$

$$x = \frac{a \times \sin. o}{\sin. u + \sin. o}$$ (A). Da nun

LJ $= a - x$, so wird

$$a - x = a - \frac{a \times \sin. o}{\sin. u + \sin. o}, \text{ oder}$$

$$a - x = \frac{a \times \sin. u}{\sin. u + \sin o} \quad (B)$$

§. 157.

Zusatz. Aus (A) (§. 156) folget

$\sin. u + \sin. o : \sin. o = a : x$, und aus (B) ist

$\sin. u + \sin. o : \sin. u = a : a - x$, welches mit Worten ausgedruckt, folgender Lehrsatz giebt: Die Summe der Sinus beyder gegebenen Winkel verhält sich zum Sinus des einen dieser Winkel, wie die Summe der gegebenen Seiten des Dreyecks zu jener Seite, welche diesem einen Winkel gegenüber liegt.

§. 158.

XXI. Aufgabe. Aus den beyden an der Grundlinie eines Dreyecks liegenden Winkeln und und dem einen Segmente der Grundlinie, welches durch das von der Spitze auf sie gezogene Loth bestimmt wird, das andere Segment dieser Grundlinie zu finden.

Wenn im △ LHJ (*Fig.* 20.) < H, < J und HM gegeben sind, so soll MJ gefunden werden.

Auflösung. Es sey HM = a, MJ = x, so ist

$$\cos. u : \sin. u = a : \frac{a \times \sin. u}{\cos. u} \;(= \text{LM}) \text{ ferner}$$

$$\cos. o : \sin. o = x : \frac{x \times \sin. o}{\cos. o} \;(= \text{LM}) \text{ folglich}$$

$$\frac{x \times \sin. o}{\cos. o} = \frac{a \times \sin. u}{\cos. u}$$

$$x = \frac{a \times \sin. u}{\cos u} \times \frac{\cos. o}{\sin. o}$$

$$x = \frac{a \times \sin. u \times \cos o}{\cos. u \times \sin o} \;(\text{A})$$

§. 159.

Zusatz. Aus dieser Gleichung (A) folget die Proportion

$$\cos. u \times \sin. o : \sin. u \times \cos. o = a : x,$$

welche folgenden allgemeinen Lehrsatz enthält: Das Recht-

eck aus dem Cosinus des an dem gegebenen Segmente liegenden Winkels in den Sinus des andern Winkels verhält sich zu dem Rechtecke aus dem Sinus des ersten in den Cosinus des andern Winkels, wie das gegebene Segment zu dem zu findenden Segmente.

§. 160.

XXII. Aufgabe. Aus dem Flächeninhalte eines rechtwinkeligen Dreyecks und einem seiner spitzen Winkel die beyden Catheten zu finden.

Es sey in dem △ ABC, (*Fig.* 21.) der Flächeninhalt $= b^2$, und $<$ B gegeben; man soll AB und AC finden. Setzt man die eine Cathete $AB = x$, so wird $b^2 = \frac{AC \times x}{2}$, folglich $\frac{2b^2}{x} = AC$, und es ist

$$x : \frac{2b^2}{x} = sin.\ tot. : tang.\ o$$

$$x^2 : 2b^2 = sin.\ tot. : tang.\ o$$

$$x^2 = \frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o} \quad (A)$$

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o.}}$$

§. 161.

Zusatz. I. Aus (A) fließet die Proportion:

$tang.\, o : sin.\, tot. = 2b^2 : x^2$ oder

$\frac{1}{2}\, tang.\, o : sin.\, tot. = b^2 : x^2$ d. h.

die halbe Tangente des gegebenen Winkels verhält sich zum Sinus totus, wie des Dreyecks Inhalt zum Quadrate der an jenem Winkel liegenden Cathete.

II. Zur geometrischen Construction des Werthes

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\, tot.}{tang.\, o}}$$

nehme man auf dem Schenkel DH (*Fig.* 22.) des gegebenen Winkels EDH $= o$ die DA $= 2b$, und errichte in A das Loth AE auf HJ, so ist, für DA als Sinus totus, AE $= tang.\, o$. Nun werde EA rückwärts verlängert, bis das auf ED errichtete Loth DG sie in G schneidet, so ist, wegen EA : AD = AD : AG, die AG $=$ $\frac{AD \times AD}{AE} = \frac{2b \times sin.\, tot.}{tang.\, o}$. Nun mache man AH = AG, und AJ $= \frac{1}{2}$ AD $= b$, beschreibe über

AH + AJ einen Halbkreis, so ist AL $= \sqrt{AH \times AJ}$ $= \sqrt{AG \times \frac{1}{2} AD} = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o}}$. Nimmt man nun AB = AL, und zieht BC ⋕ DE, so ist BAC das gesuchte Dreyeck.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

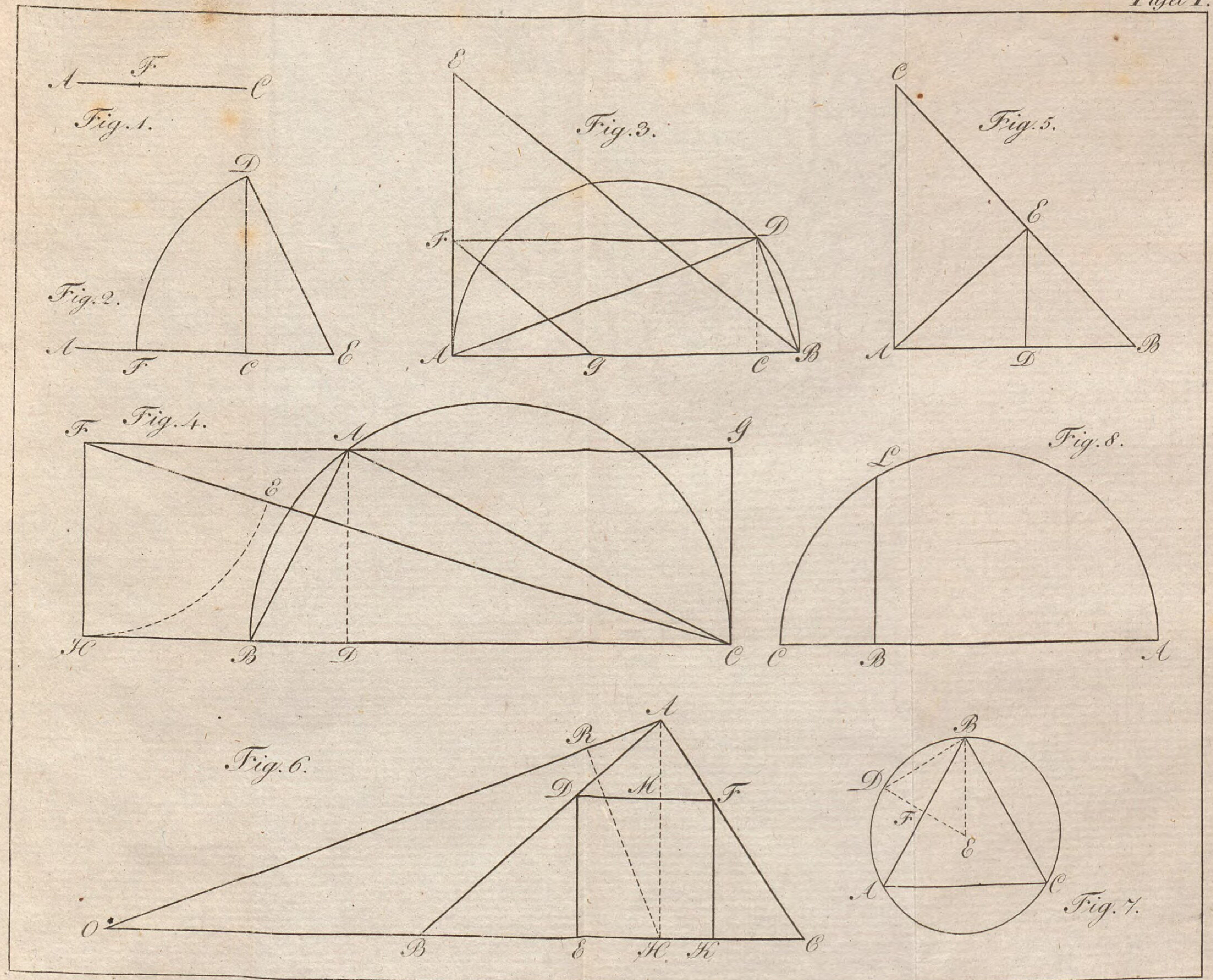


Fig. 1.
A F C
Fig. 2.
D
A F C E
Fig. 3.
E
F D
A G C B
Fig. 5.
C
E
A D B
Fig. 4.
F A G
E
H B D C
Fig. 8.
L
C B A
Fig. 6.
A
R
D M F
O B E H K C
Fig. 7.
B
D
F
E
A C

Fig. 9.

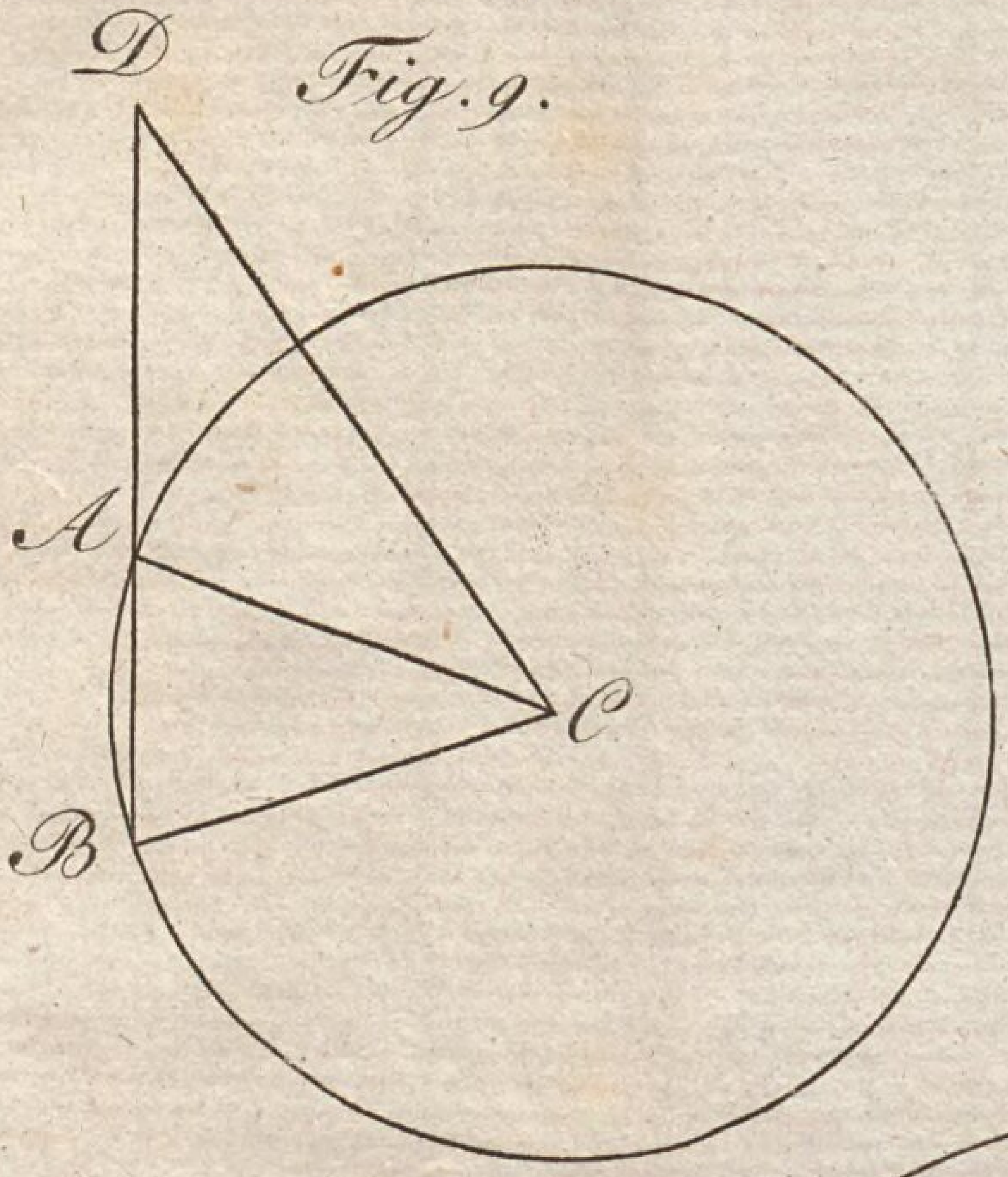


Fig. 10.

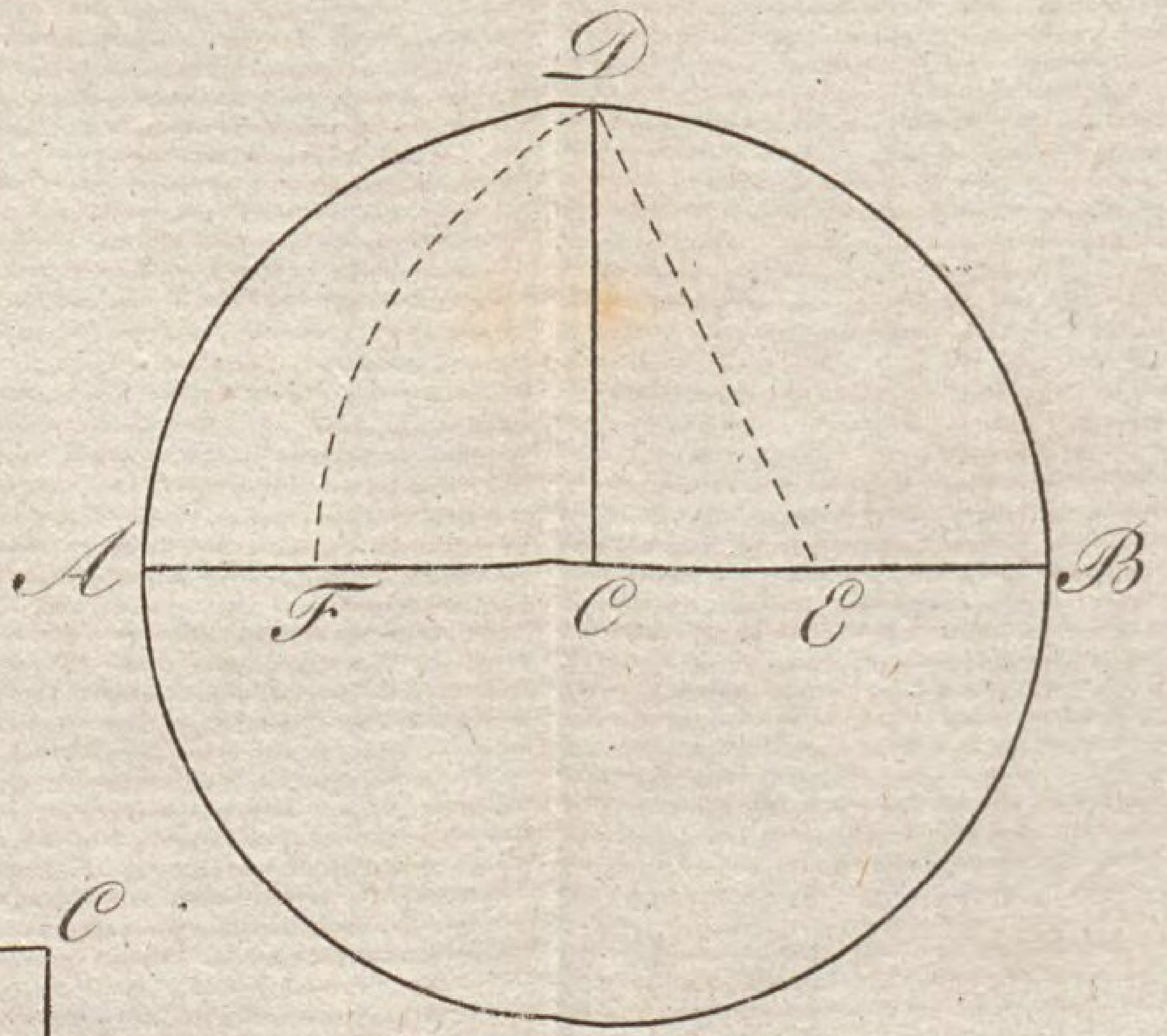


Fig. 11.

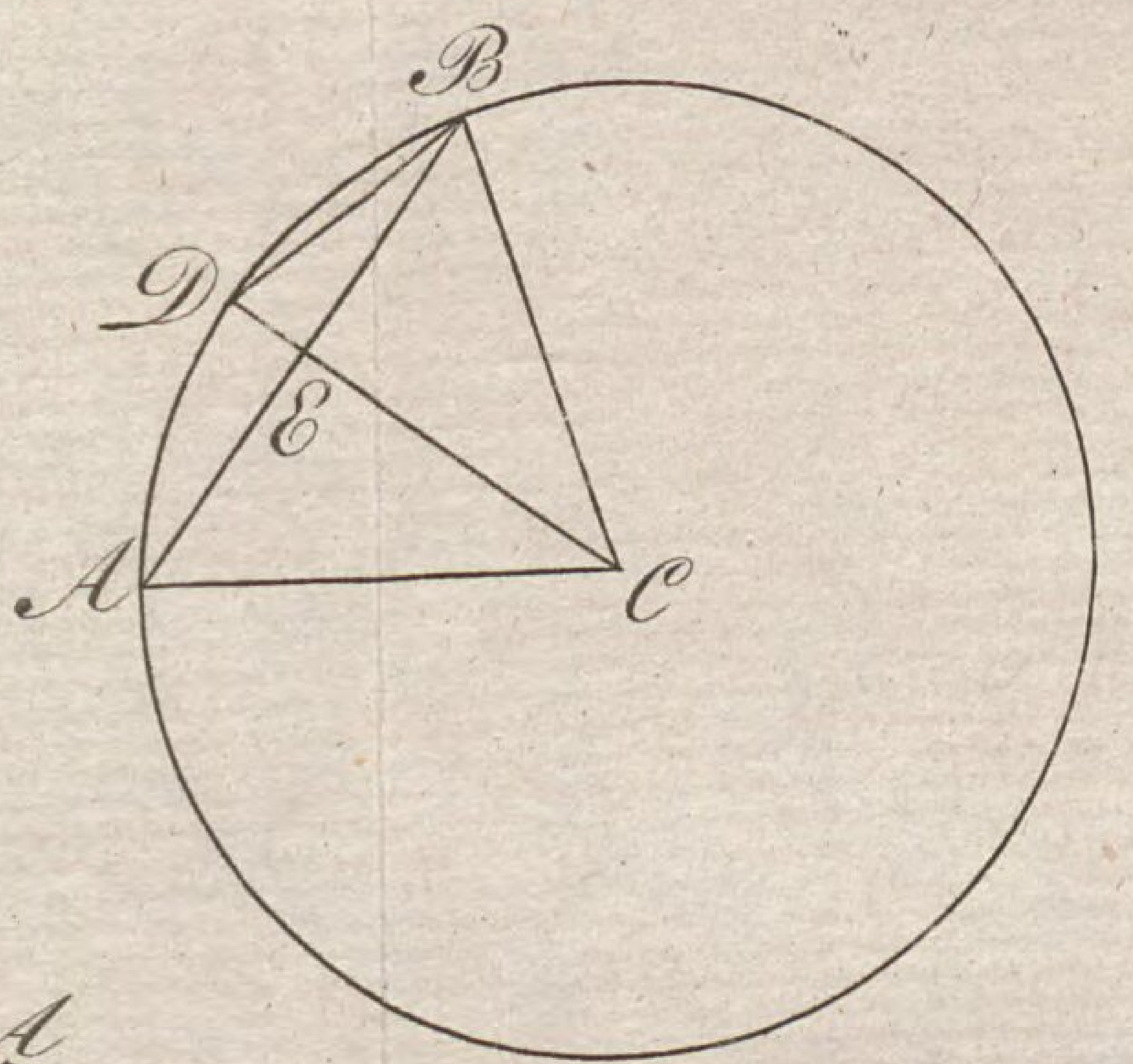


Fig. 12.

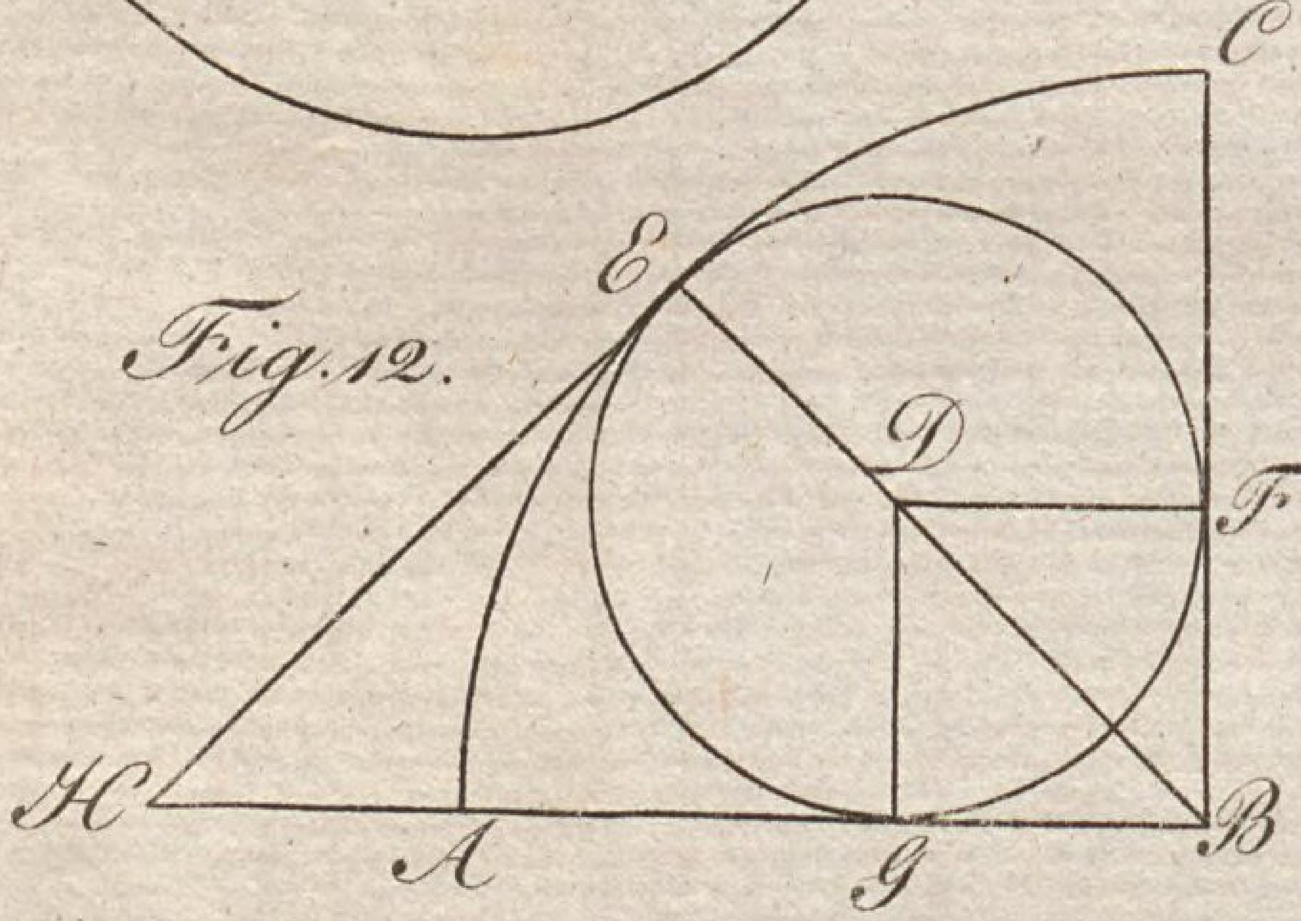


Fig. 14.

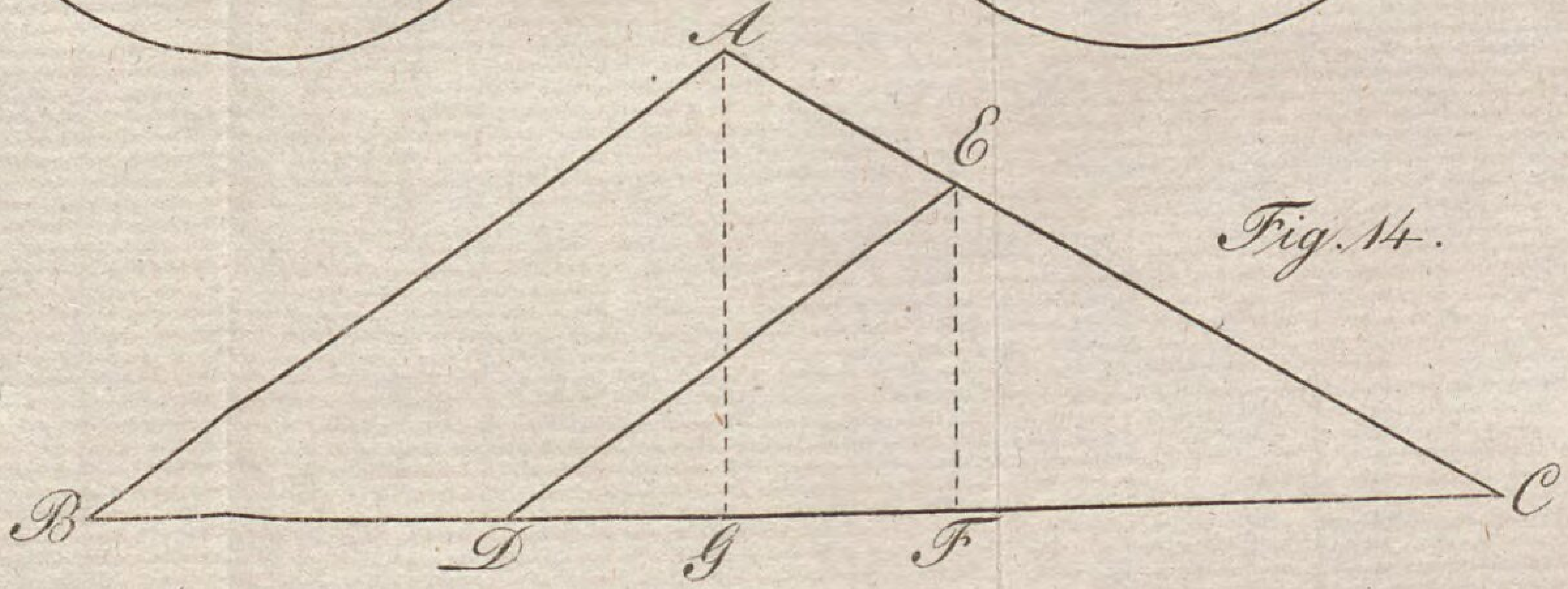


Fig 13

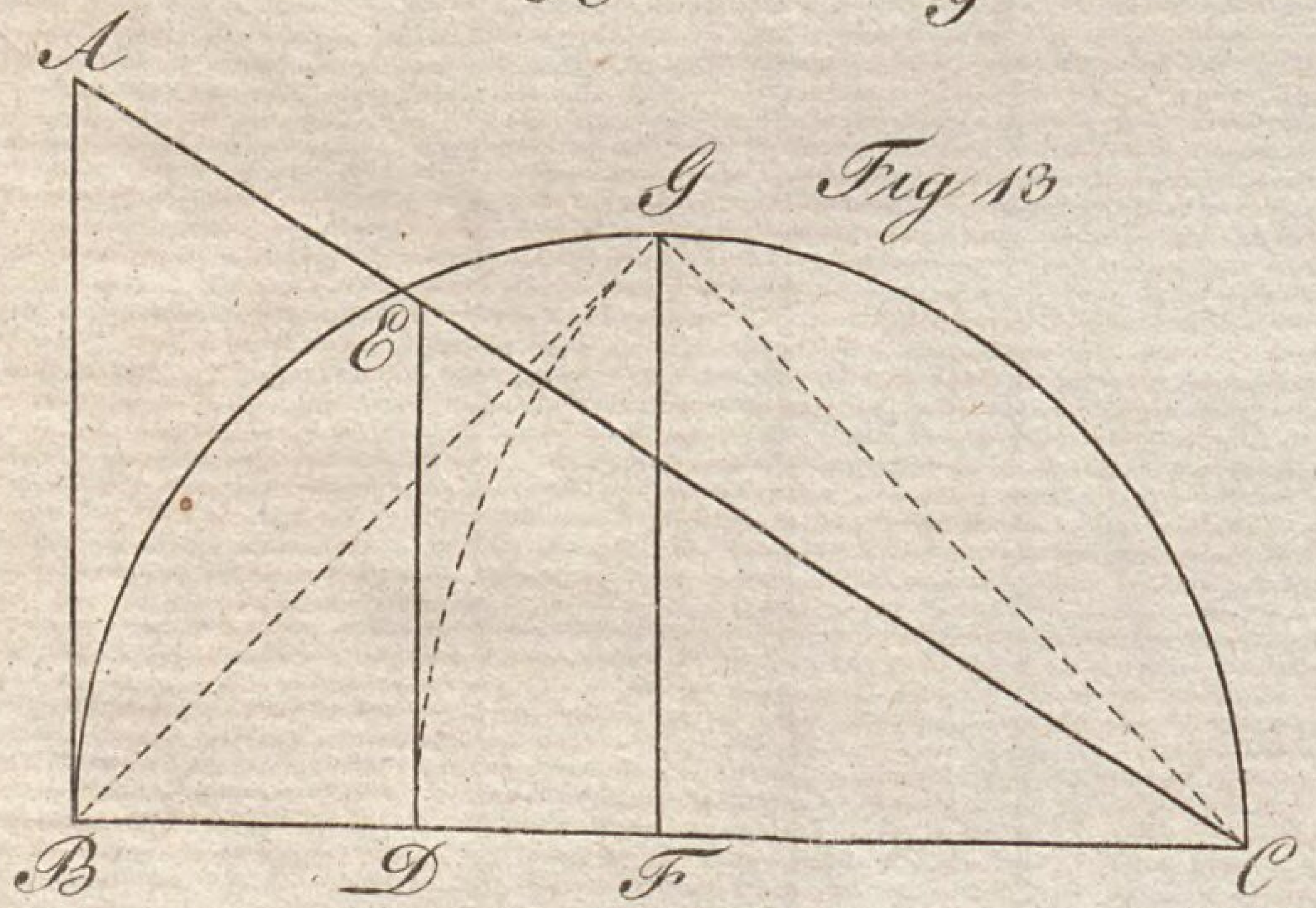


Fig. 15.

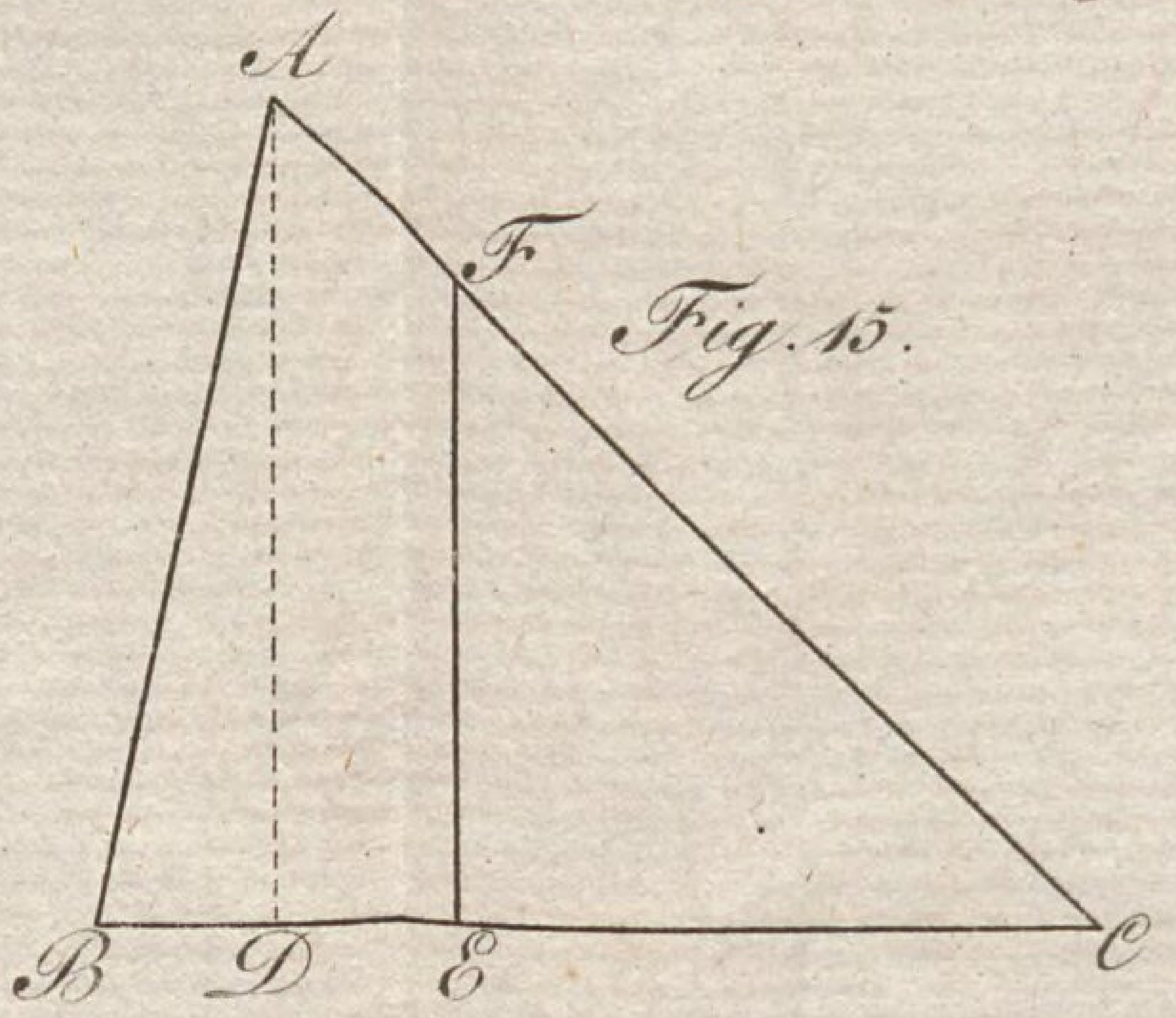


Fig. 16.

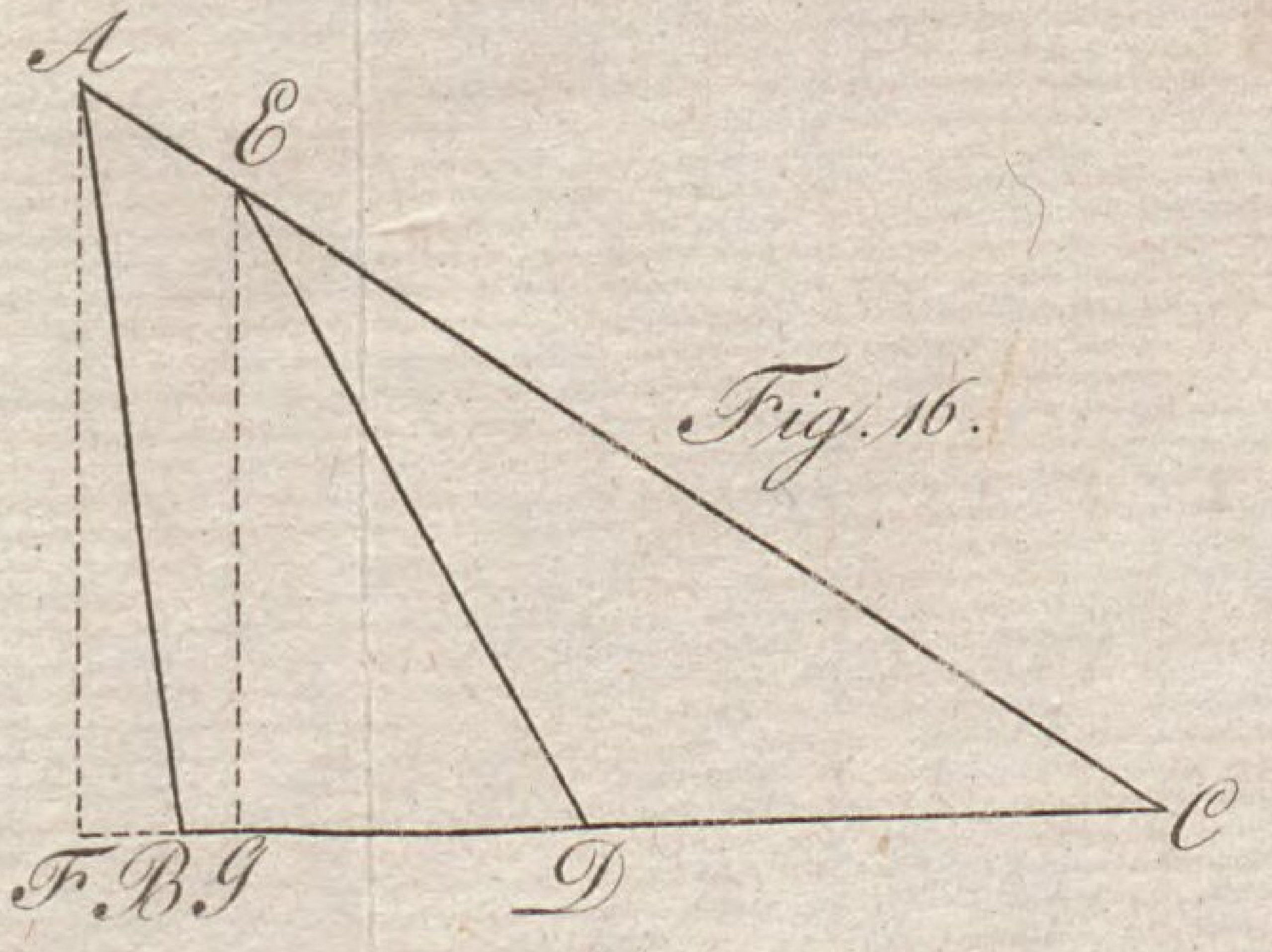


Fig 17.

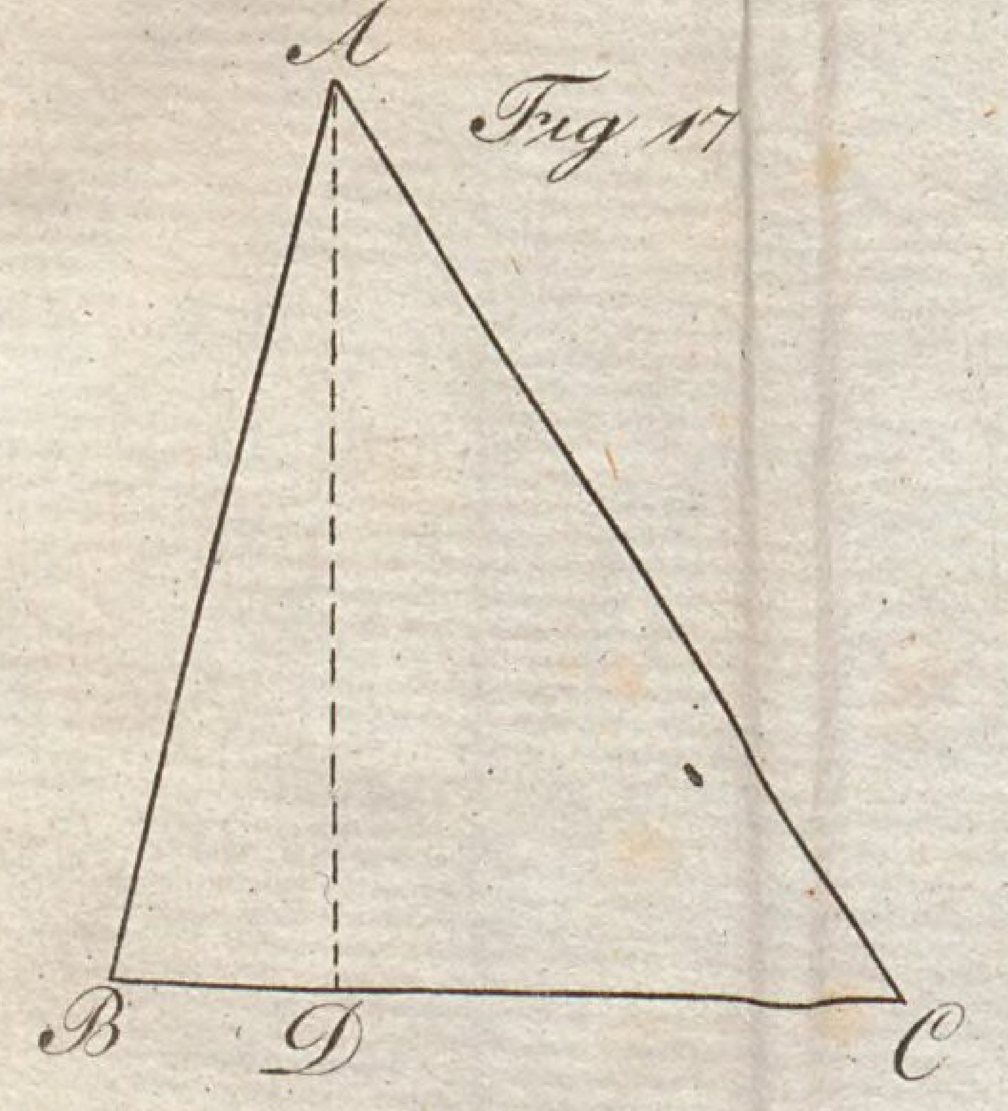


Fig. 18.

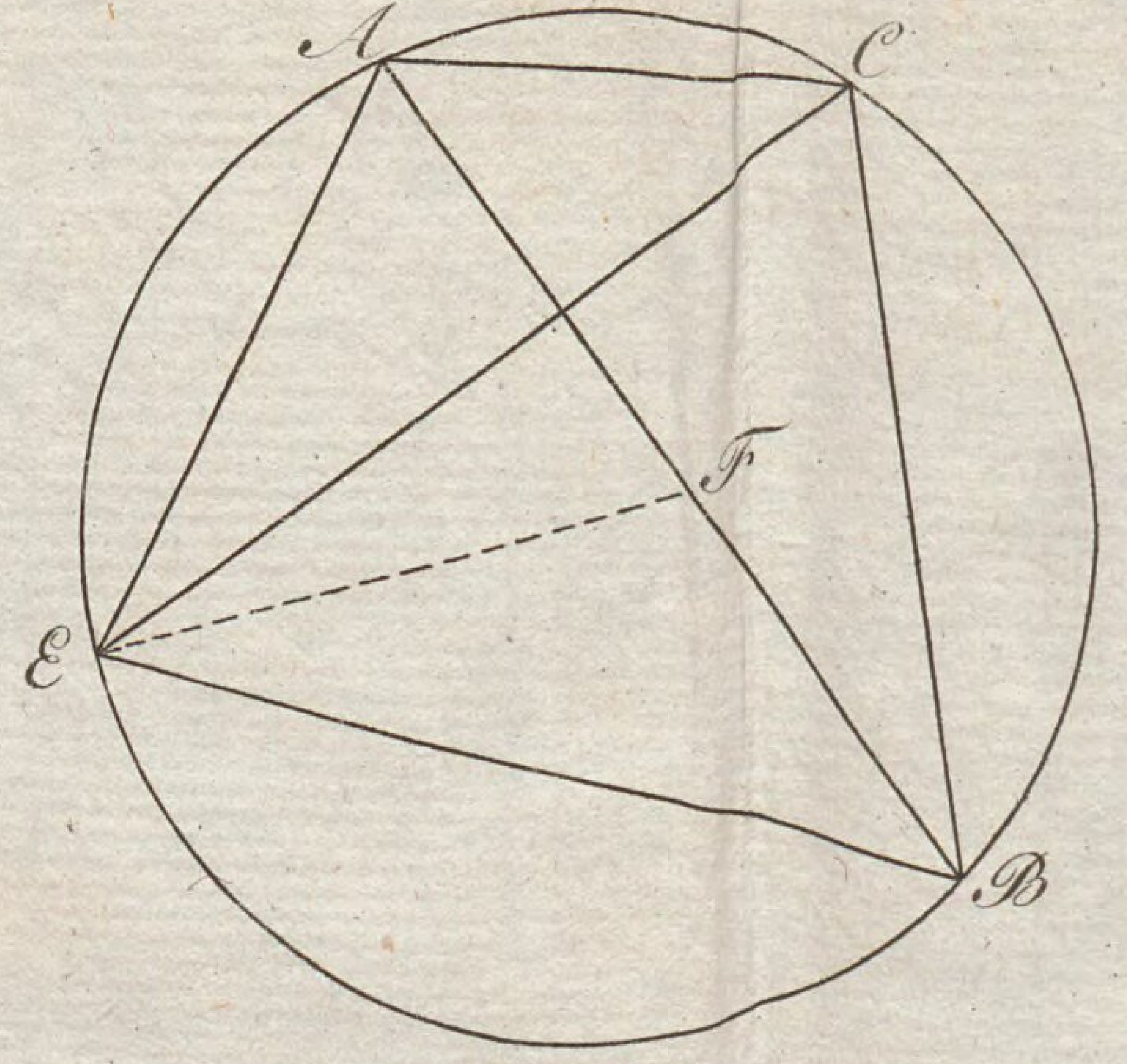


Fig. 19.

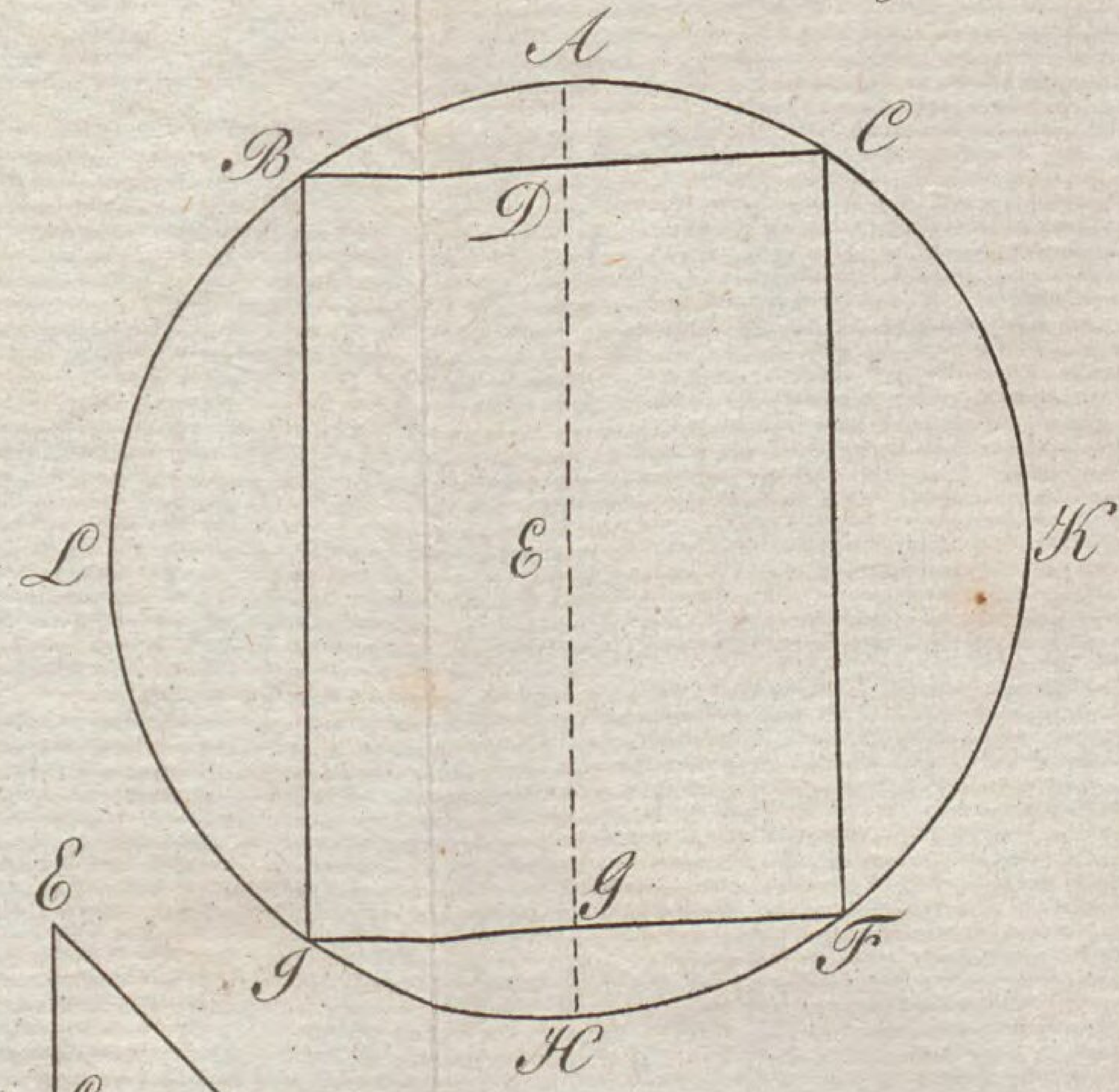
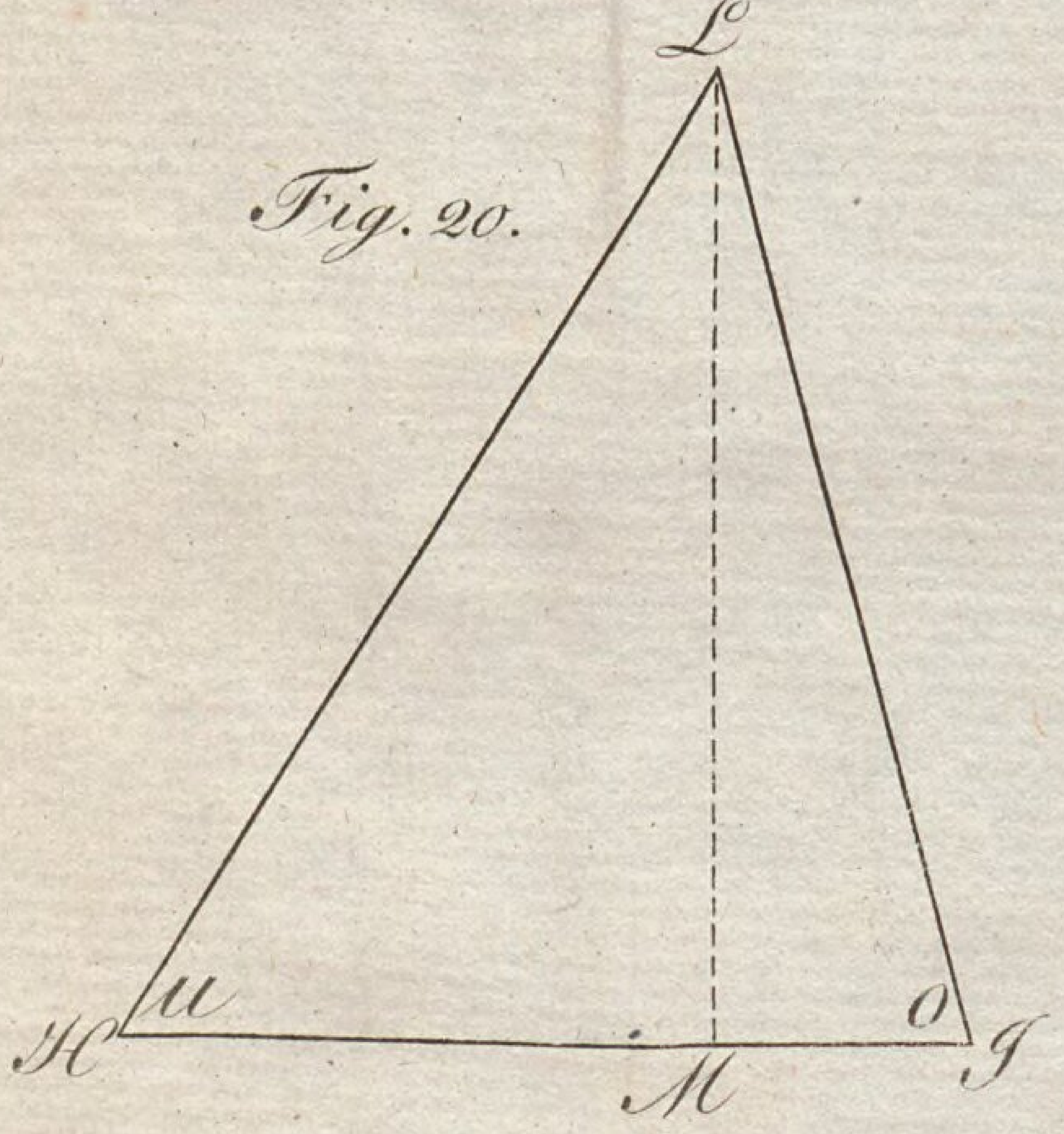


Fig. 20.



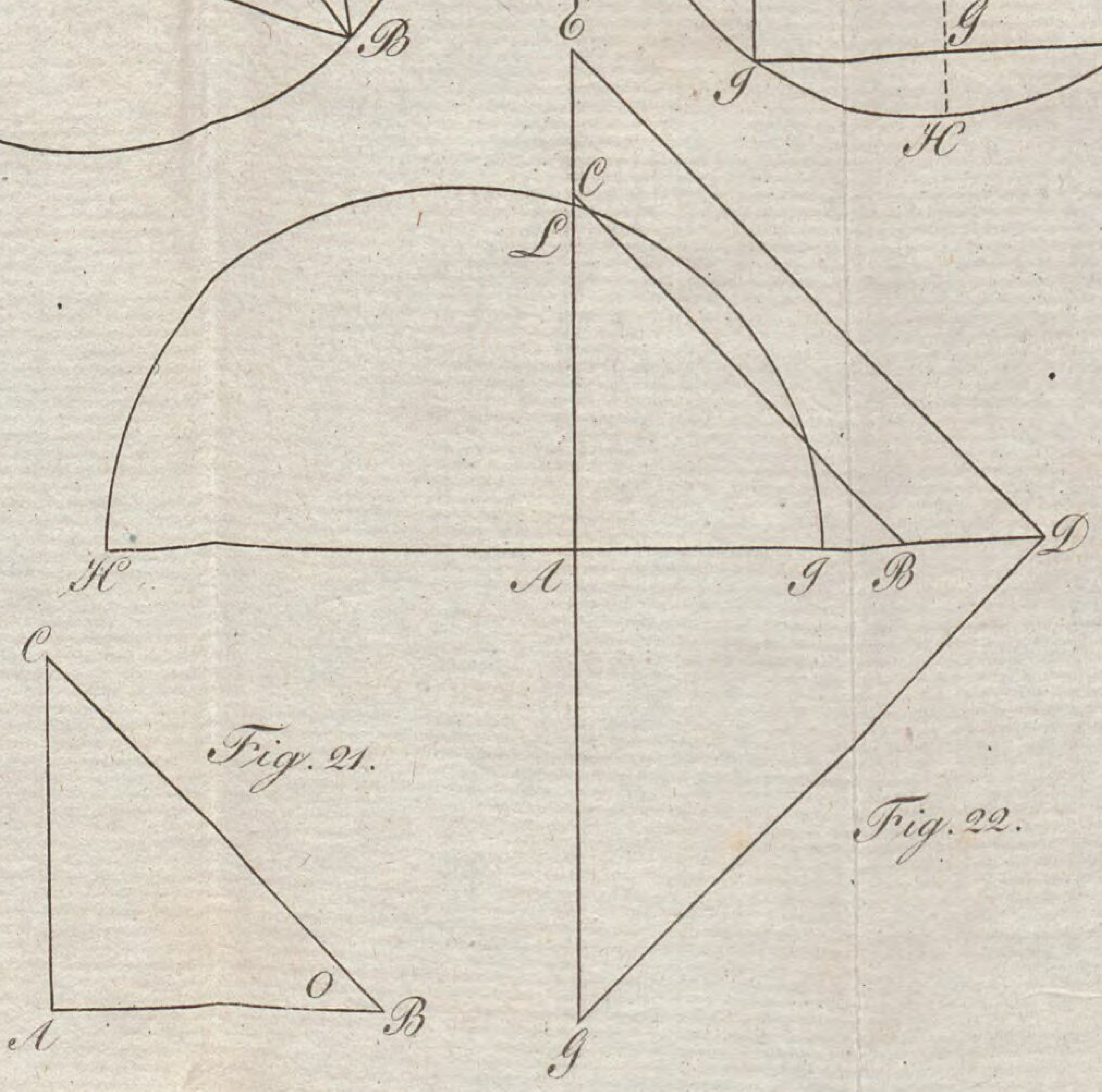


Fig. 21.

Fig. 22.

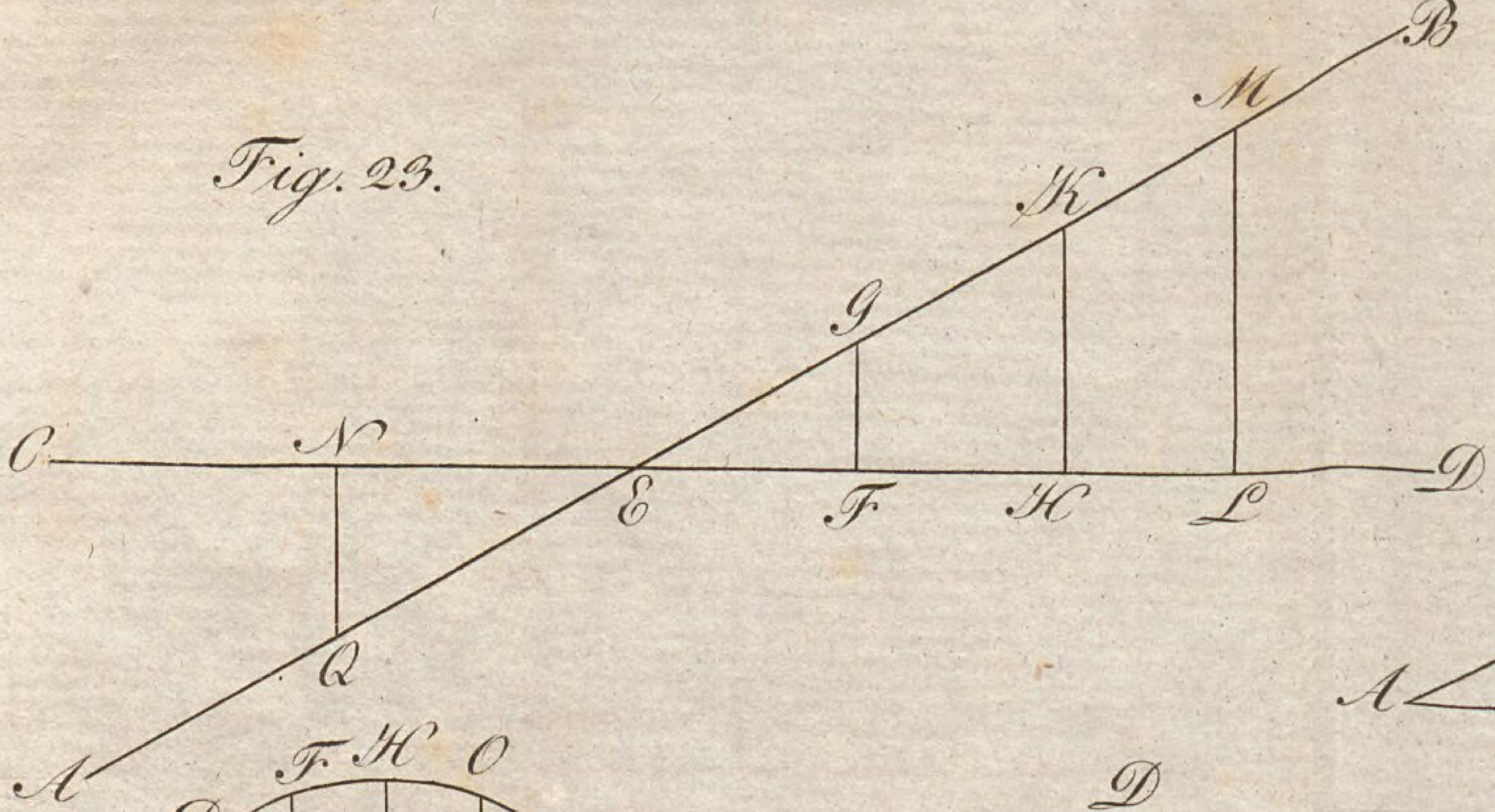


Fig. 23.

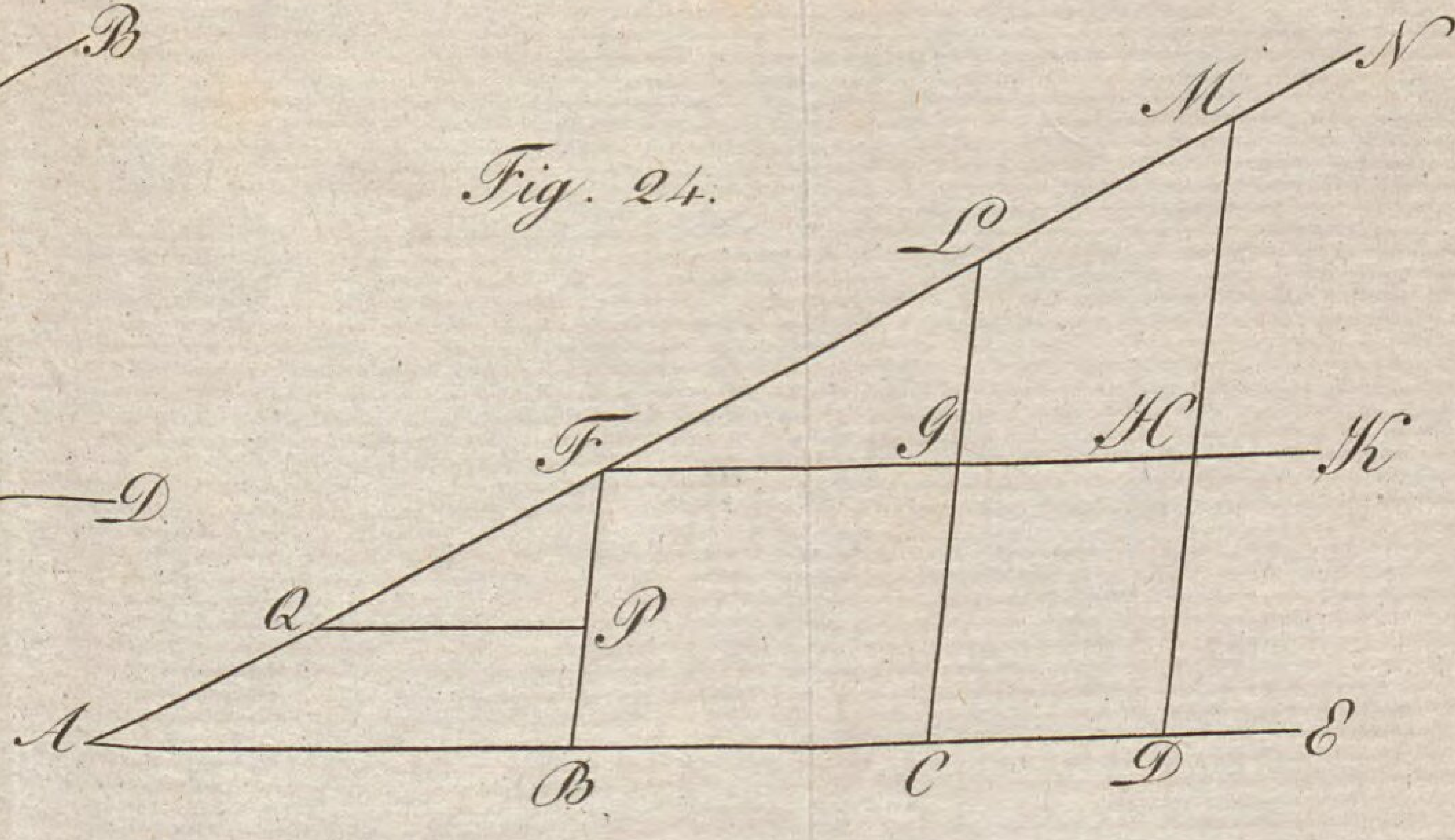


Fig. 24.

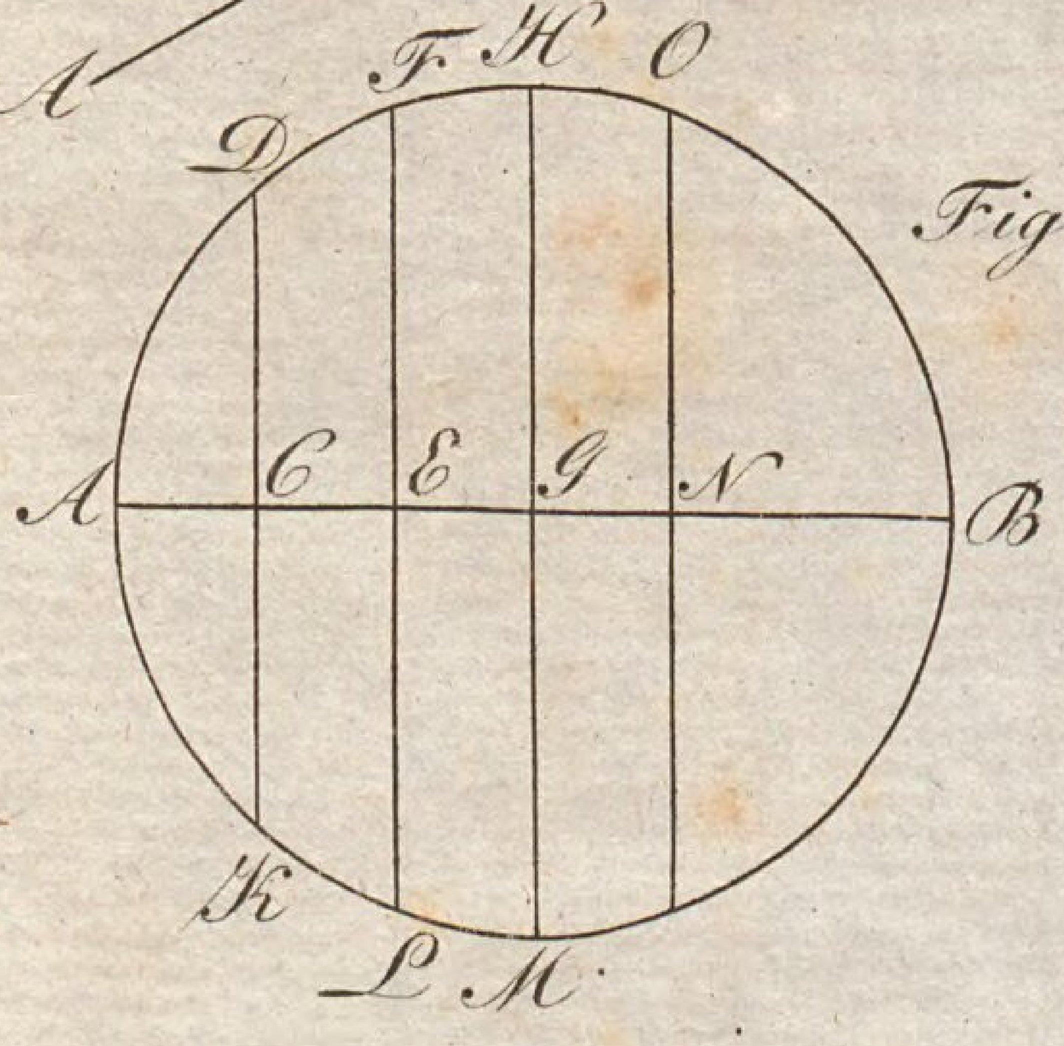


Fig. 25.

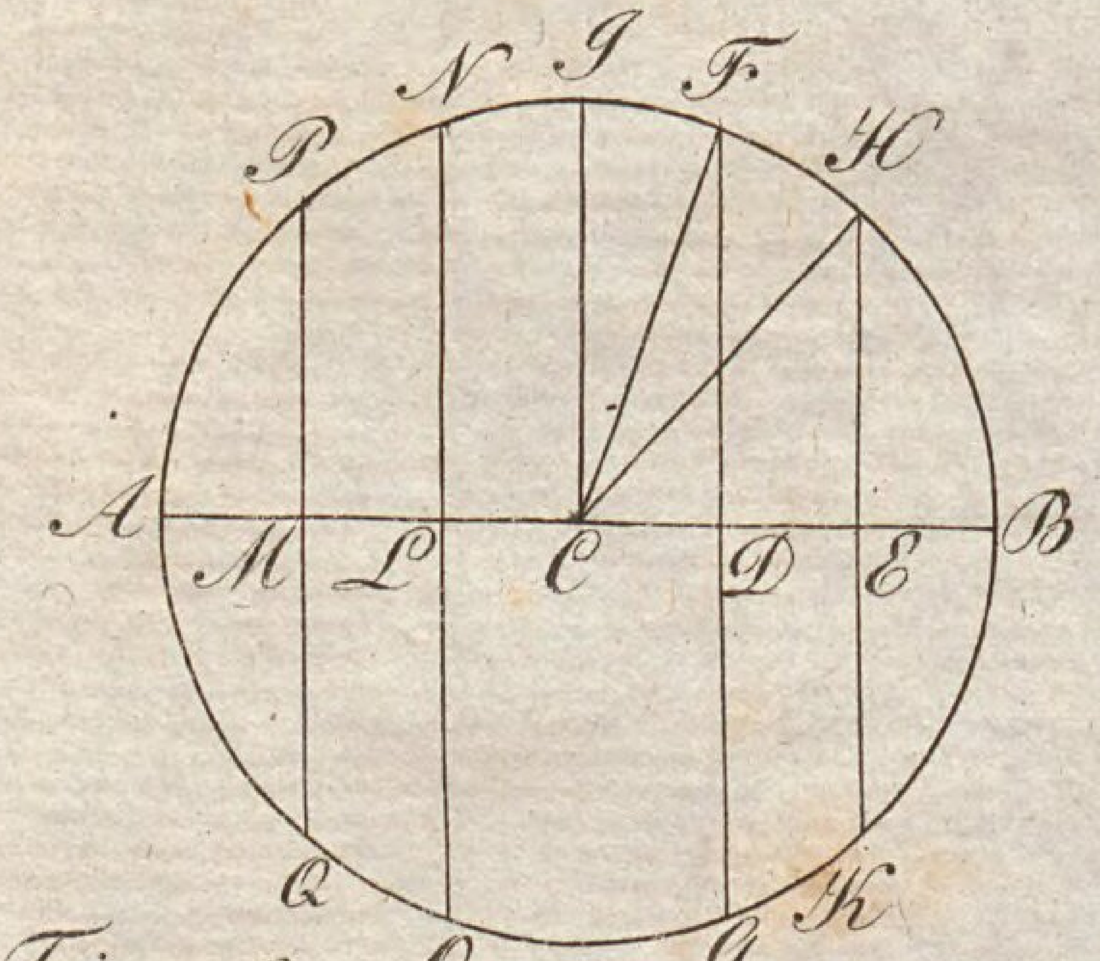


Fig. 26.

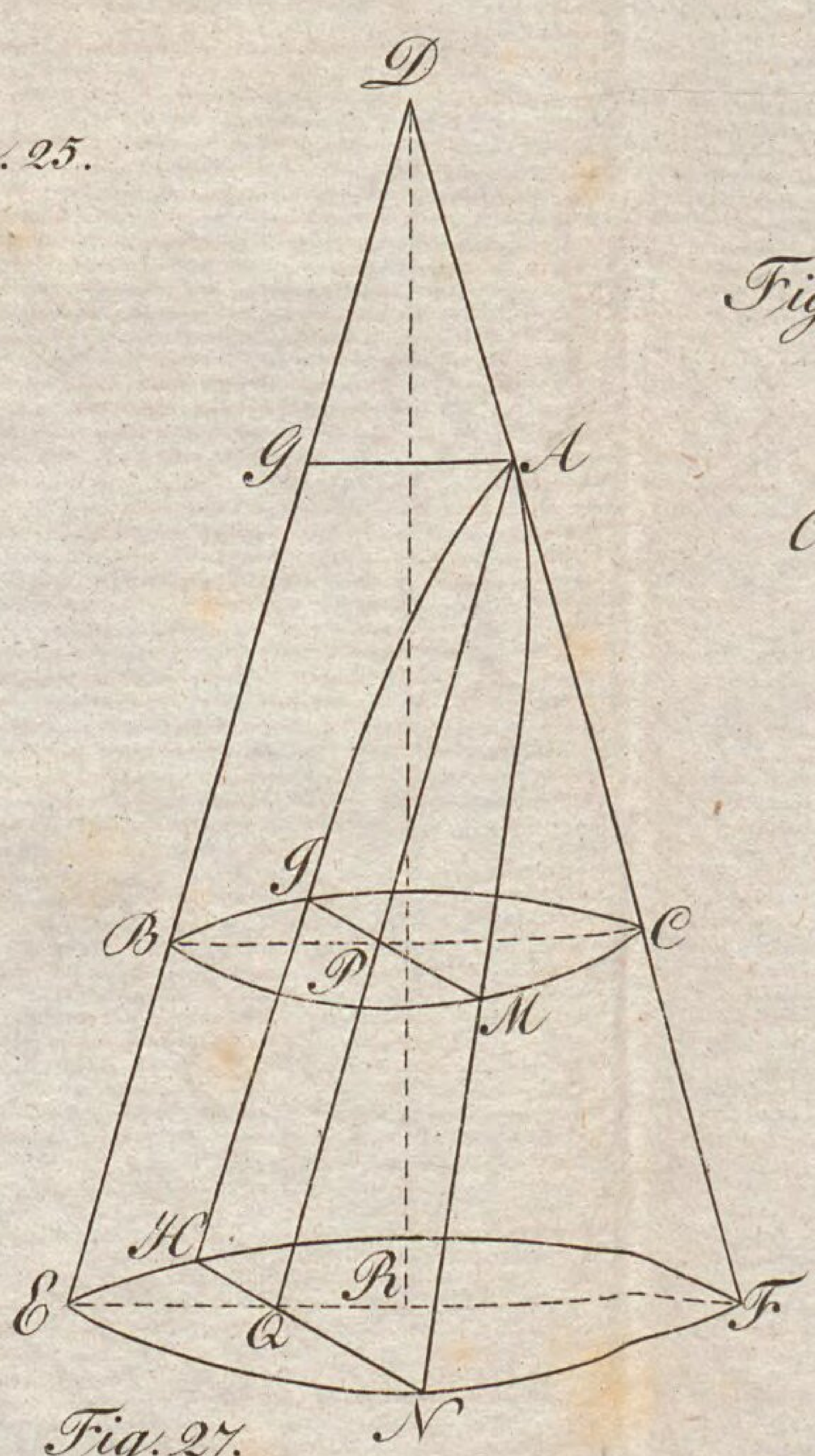


Fig. 27.

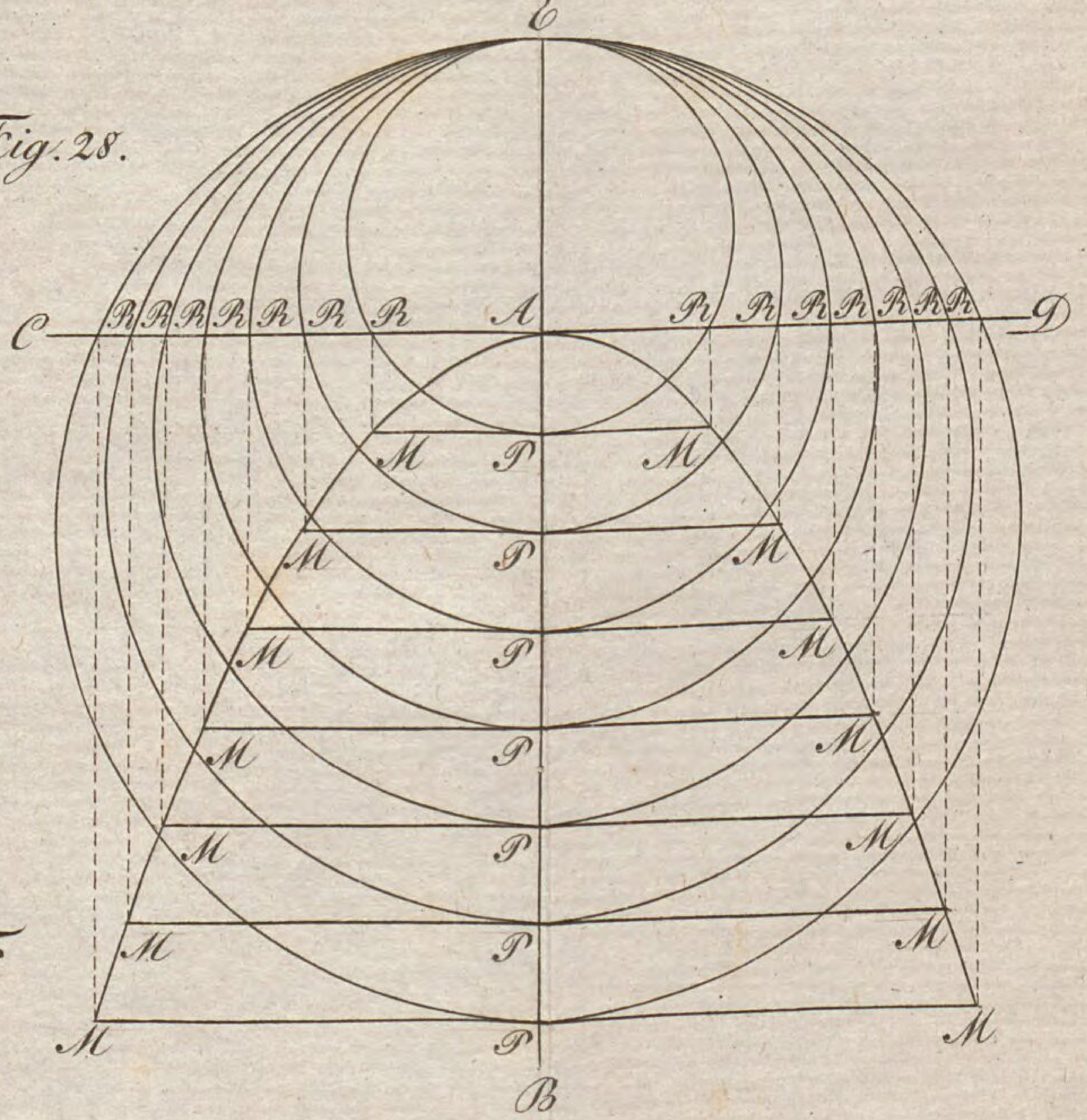


Fig. 28.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Grundlehren der Algebra zur Erleichterung dieses Studiums faßlich vorgetragen

Giesen 1816

Math.p. 741
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083298-0